1-1 ESPACE VECTORIEL

Soit un ensemble E = {u, v, w, ….} muni d'une loi de composition interne notée « + » qui vérifie :

- (u + v) + w = u + (v + w)
- 0 + u = u
- u + (- u) = 0
- u + v = v + u

(E , +) est appelé groupe commutatif

Cet ensemble est muni d'une loi de composition interne « . » qui vérifie :

- $\alpha . (\beta . u) = \alpha\beta . u$
- 1 . u = u
- $\alpha . (u + v) = \alpha . u + \alpha . v$
- $(\alpha + \beta) . u = \alpha . u + \beta . u$

E est alors appelé espace vectoriel sur l'ensemble des réels si α et β sont réels.

1-2 ESPACE AFFINE EUCLIDIEN

Soit E un espace vectoriel réel et $\mathcal{E}$ un ensemble d'éléments P, Q, ...
$\mathcal{E}$ = { P, Q, …. }
Il existe une application $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E$
$(P,Q) \rightarrow PQ$ qui vérifie :

- $P \in \mathcal{E}$, $\exists$ Q tel que f (P,Q) = PQ
- si P = Q alors PQ = 0
- f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)

alors $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien.

1-3 ESPACES UTILISES EN MECANIQUE – vecteurs - notation

De très nombreuses grandeurs physiques sont représentées par des vecteurs, éléments d'espaces vectoriels jouissant de l'ensemble des propriétés brièvement exposées précédemment. L'espace est toujours relié à l'espace physique tridimensionnel, l'espace affine est un espace constitué de points.
Le vecteur, dans l'espace de dimension 3, est généralement noté acec une flèche sur le dessus.

Dans beaucoup d'ouvrages, et ici, les vecteurs seront notés en caractères gras : **u**, **PQ**.

Dans vos copies, cours manuscrit, exercices, tableau, on utilisera la flèche.

1-4 VECTEURS UTILISES EN MECANIQUE

En considérant les espaces définis ci-dessus, on définit :

- Bipoint : le couple ordonné de deux points (P,Q) est appelé bipoint et noté **PQ**. P est l'origine du bipoint, Q l'extrémité. Il est unique. On l'appelle aussi vecteur lié.
- Vecteur : le vecteur **PQ** est défini par la classe d'équivalence formée par tous les bipoints équipollents au bipoint **PQ**. (même direction, même sens, même norme).
- Vecteur glissant : le vecteur glissant est une restriction du vecteur : c'est l'ensemble des bipoints équipollents au bipoint **PQ** portés par un même support (A, **u**), A étant un point de l'espace, **u** un vecteur directeur ; (A, **u**) forme une droite. (même support, même sens, même norme).

Nota : ne pas confondre *DIRECTION* et *SUPPORT*. Par exemple, la verticale est une direction définie par le vecteur gravité **g**, la verticale passant par le point A est une droite ou support.

Exemples :

- La force en A de 1 sur 2, 1 et 2 étant des espaces matériels, est un vecteur glissant : $\mathbf{A}_{1\rightarrow 2}$
- La vitesse de B appartenant à un solide S_1 dans son mouvement par rapport à un solide S_2 est un vecteur lié: $\mathbf{VB}\in \mathbf{S_1/S_2}$
- La pesanteur est représentée par un vecteur de direction verticale orienté vers le bas : **g**

1-5 BASE D'UN ENSEMBLE VECTORIEL DE DIMENSION 3

Soit b:(**x**, **y**, **z**) trois vecteurs unitaires orthogonaux deux à deux. b forme une base orthonormée.

Un vecteur peut s'écrire x **x** + y **y** + z **z** et a comme coordonnées ou composante (x, y, z). Ce même vecteur s'écrira différemment dans une autre base, mais restera intrinsèquement le même vecteur.

Un point aura des coordonnées dans un repère, que l'on définit par un point et une base.
Soit un point O.
R : O (**x**, **y**, **z**) définit le repère R.
P a comme coordonnées (x, y, z) dans R(O,b).

Notez bien :
Les coordonnées d'un point dans l'espace s'écrivent dans un REPERE.
Les coordonnées ou composantes d'un vecteur s'écrivent dans une BASE.

1-6 OPERATIONS SUR LES VECTEURS

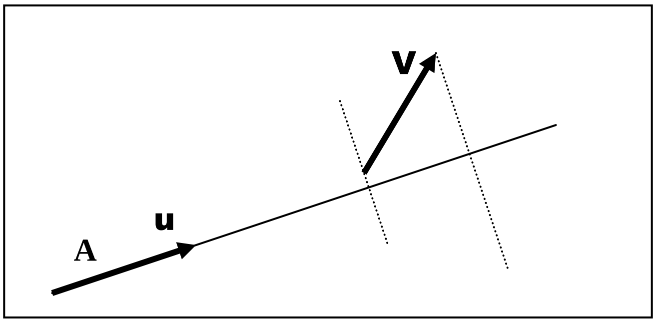
Soit un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 composé de vecteurs **U**, **V**, **W**, ...

161 - Produit scalaire

$$\mathbf{U} \bullet \mathbf{V} = \|\mathbf{U}\| . \|\mathbf{V}\| \cos(\mathbf{U}, \mathbf{V})$$

Les cas de nullité sont : si l'un des vecteurs est nul
si les vecteurs sont orthogonaux

Le produit scalaire permet de projeter orthogonalement un vecteur **V** sur un axe (A, **u**), **u** étant le vecteur unitaire de cet axe, A un point de l'axe.



Notez bien : les composantes d'un vecteur **V** dans une base orthonormée directe b_i($\mathbf{x_i}$, $\mathbf{y_i}$, $\mathbf{z_i}$) sont respectivement :

$$\mathbf{V}\bullet \mathbf{x_i},\ \mathbf{V}\bullet \mathbf{y_i},\ \mathbf{V}\bullet \mathbf{z_i}$$

Calcul :

Si **U₁** (x_1,y_1,z_1) **et U₂** (x_2,y_2,z_2) dans une même base b, $\mathbf{U} \bullet \mathbf{V} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

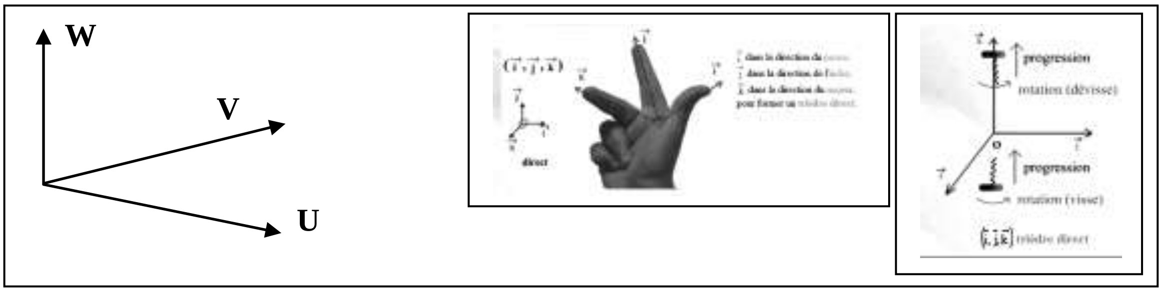
Le résultat est un scalaire, positif ou négatif. On définit :

- la norme $\mathbf{U}^2 = || \mathbf{U} || . || \mathbf{U} ||$
- cas de nullité si l'un des vecteurs est nul ou si les vecteurs sont orthogonaux.
- $\mathbf{U} \bullet (\mathbf{V} + \mathbf{W}) = \mathbf{U} \bullet \mathbf{V} + \mathbf{U} \bullet \mathbf{W}$
- $\mathbf{U} \bullet \lambda \mathbf{V} = \lambda \ \mathbf{U} \bullet \mathbf{V}$

<u>162 - Produit vectoriel</u>

Le produit vectoriel **U** vectoriel **V** se note $\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}$
Le résultat est un <u>vecteur</u> :

- Normal au plan formé par les deux vecteurs.
- $|| \mathbf{U} \wedge \mathbf{V} || = || \mathbf{U} || . || \mathbf{V} || \sin(\mathbf{U}, \mathbf{V})$
- Orienté de telle façon que le trièdre (**U**, **V**, **W**) soit un trièdre direct.



- si **U** si **V** alors **W**

$$\mathbf{U}\ \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}_b \qquad \mathbf{V}\ \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}_b \qquad \mathbf{W}\ \begin{vmatrix} y_1z_2-y_2z_1 \\ -x_1z_2+x_2z_1 \\ x_1y_2-x_2y_1 \end{vmatrix}_b$$

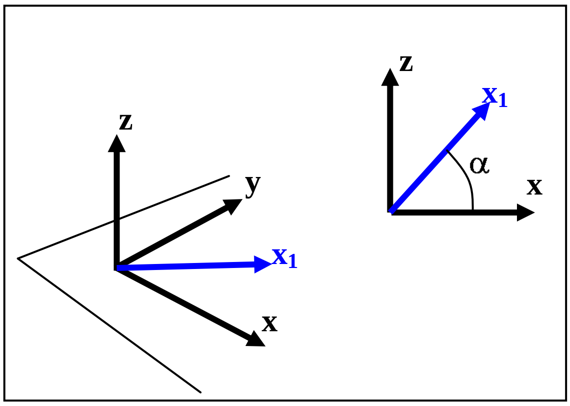
<u>Propriétés :</u>

- $\mathbf{U} \wedge \mathbf{V} = -\mathbf{V} \wedge \mathbf{U}$
- $\mathbf{U} \wedge (\alpha \mathbf{V} + \beta \mathbf{W}) = \alpha \mathbf{U} \wedge \mathbf{V} + \beta \mathbf{U} \wedge \mathbf{W}$
- Cas de nullité : **si** un des vecteurs est nul
  Si les deux vecteurs sont <u>colinéaires</u>

Rq : la norme du produit vectoriel de deux vecteurs est égale à l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs.

Rq : Dans une base orthonormée directe b (**x**, **y**, **z**) :

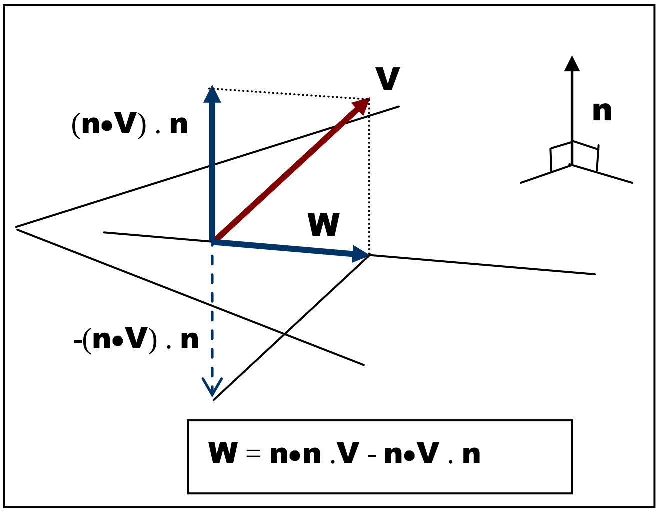
- $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{z}$
- $\mathbf{y} \wedge \mathbf{z} = \mathbf{x}$
- $\mathbf{z} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{y}$
- $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x_1} = \sin\alpha\ \mathbf{z}$



- 163 - Double produit vectoriel

$\mathbf{U} \wedge (\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}) = \mathbf{U} \bullet \mathbf{W} \,.\, \mathbf{V} - \mathbf{U} \bullet \mathbf{V} \,.\, \mathbf{W}$
Le résultat du double produit vectoriel est un vecteur.

Une application est la projection d'un vecteur sur un plan : la projection du vecteur **V** sur le plan P de normale **n** est égale à :



$\mathbf{W} = \mathbf{n} \wedge (\mathbf{V} \wedge \mathbf{n})$
$\mathbf{W} = \mathbf{n} \bullet \mathbf{n} \,.\mathbf{V} - \mathbf{n} \bullet \mathbf{V} \,.\, \mathbf{n}$
$\mathbf{W} = \mathbf{1} \,.\mathbf{V} + (-\ \mathbf{n} \bullet \mathbf{V} \,.\, \mathbf{n})$

Ou par soustraction vectorielle :
W = **V** – (projection de **V** sur **n**). **n**

164 - Produit mixte

Soient trois vecteurs **U**, **V**, **W** :

Le produit mixte est un scalaire défini par :

$$\mathbf{U} \bullet (\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}) = \mathbf{V} \bullet (\mathbf{W} \wedge \mathbf{U}) = \mathbf{W} \bullet (\mathbf{U} \wedge \mathbf{V})$$
$$\mathbf{U} \bullet (\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}) = (\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}) \bullet \mathbf{U}$$

On peut l'écrire (**U**, **V**, **W**) puisqu'il y a permutation circulaire des éléments dans l'expression.
Pour le démontrer, on calcule les coordonnées dans chaque cas.

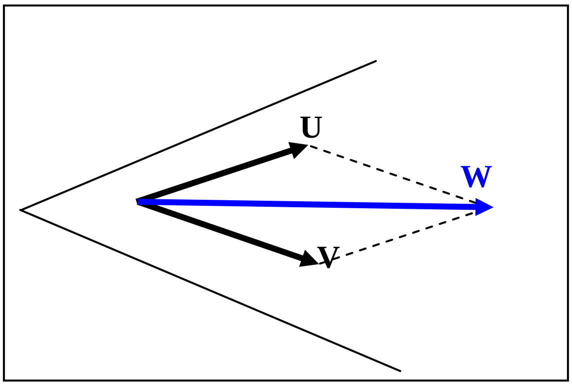
Les cas de nullité sont :

- Un des vecteurs est nul.
- Les trois vecteurs sont coplanaires.
- Deux vecteurs sont colinéaires.

Remarque : le résultat du produit mixte de trois vecteurs est le volume du parallélépipède formé des trois vecteurs.

- 165 – Addition vectorielle

Le résultat de l'addition vectorielle est un vecteur.
W = **U** + **V**

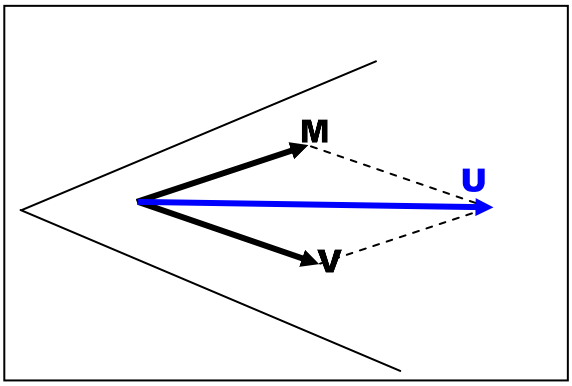


L'addition vectorielle est commutative :
W = **U** + **V** = **V** + **U**

L'addition vectorielle est associative :
(**U** + **V**) + **A** = **U** + (**V** + **A**)

- 166 - Soustraction vectorielle

Le résultat de la soustraction vectorielle est un vecteur.



M = **U** - **V**

La soustraction vectorielle est anticommutative :

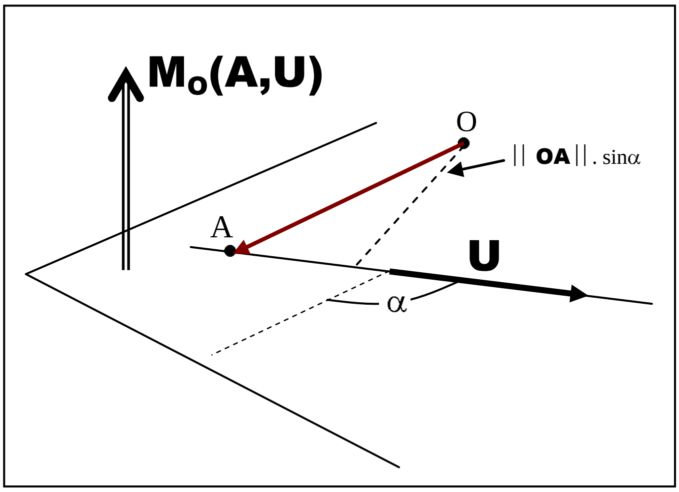
U - **V** = - (**V** – **U**)

- 167 – Multiplication par un scalaire

- 168 – Moment d'un vecteur glissant

On définit le moment d'un vecteur glissant $\mathbf{U_i}$, de support (D_i). A_i étant un point du support, $\mathbf{u_i}$ étant le vecteur directeur du support. Le moment $\mathbf{M_O(A_i, U_i)} = \mathbf{OA_i} \wedge \mathbf{U_i}$

U un vecteur glissant
O un point de $\mathcal{E}$



(O, **U**) forment un plan.

$\mathbf{M_O(A, U)} = \mathbf{OA} \wedge \mathbf{U}$
est un vecteur.

$\mathbf{M_O(A, U)}$ n'est ni un vecteur glissant, ni un vecteur lié, c'est un vecteur libre, ou vecteur.

$|| \mathbf{M_O(A, U)} || = || \mathbf{OA} || . || \mathbf{U} || . \sin \alpha$

Cette notion sera utilisée pour modéliser le moment d'une force.

$|| \mathbf{M_O(A,F)} || = \pm d . || \mathbf{F} ||$

1-7 Interprétation géométrique du produit vectoriel et du produit mixte :

http://gilles.costantini.pagesperso-orange.fr/agreg_fichiers/PMPV.pdf

- $\| \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \|$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.
- $\| [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] \|$ est le volume du parallélépipède construit sur $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$.
- $1/6 \| [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] \|$ est le volume du tétraèdre construit sur $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$.

Démonstration :

Pour le parallélogramme :
Aire = Base × Hauteur = $\| \mathbf{v} \| \times h = \| \mathbf{v} \| \times \| \mathbf{u} \| \times \sin\theta = \| \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \|$

Pour le parallélépipède :
Volume = Base × Hauteur = $\| \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \| \times h = \| \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \| \times \| \mathbf{w} \| \times \cos\theta = |(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \,.\, \mathbf{w}| = | [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] |$

Pour le tétraèdre :
Volume = 1/3 × Base × Hauteur = $1/3 \times 1/2 \| \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \| \times \| \mathbf{w} \| \times \cos\theta = 1/6 \, | [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] |$

- Distance d'un point M à une droite $(A,\mathbf{u})$:

  $$d(M, (A,\mathbf{u})) = \|\mathbf{AM}\wedge\mathbf{u}\| / \|\mathbf{u}\|$$

- Distance d'un point M à un plan $(A,\mathbf{u},\mathbf{v})$:

  $$d(M, (A,\mathbf{u},\mathbf{v})) = \|\mathbf{AM}\wedge\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\| / \|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\|$$

- Division vectorielle :

Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ avec $\mathbf{u}$ non nul.
L'équation $\mathbf{u} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{v}$, d'inconnue $\mathbf{x}$ admet des solutions si et seulement si $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$.
Et $\mathbf{x} \bullet \mathbf{v} = 0$.
Dans ce cas, les solutions sont de la forme :
$\mathbf{x} = \lambda\, \mathbf{u} - (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) / \| \mathbf{u} \|^2$ où $\lambda \in R$.

Démonstration :

Supposons que l'équation $\mathbf{u} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{v}$ admette au moins une solution $\mathbf{x}$.
[2]Alors : $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$
D'après la formule de double produit vectoriel :
$(\mathbf{u} \bullet \mathbf{x})\, \mathbf{u} - \| \mathbf{u} \|^2\, \mathbf{x} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$
Et comme u est non nul :
$\mathbf{x} = \lambda\, \mathbf{u} - (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) / \| \mathbf{u} \|^2$ avec $\lambda = \mathbf{u}\bullet\mathbf{x} / \| \mathbf{u} \|^2$

Supposons que λ quelconque $\in R$.
$\mathbf{x} = \lambda\, \mathbf{u} - (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) / \| \mathbf{u} \|^2$ avec λ réel
Calculons $\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}$
$\mathbf{u} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{u} \wedge \lambda\, \mathbf{u} - \mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) / \| \mathbf{u} \|^2 =$
$\mathbf{u} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{0} - [\, (\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})\, \mathbf{u} - \mathbf{u}^2\, \mathbf{v}\,] / \| \mathbf{u} \|^2 = \mathbf{v}$

$\mathbf{x} = \lambda\, \mathbf{u} - (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) / \| \mathbf{u} \|^2$ avec λ réel est bien solution.