Exercice 1 : ELEVATEUR

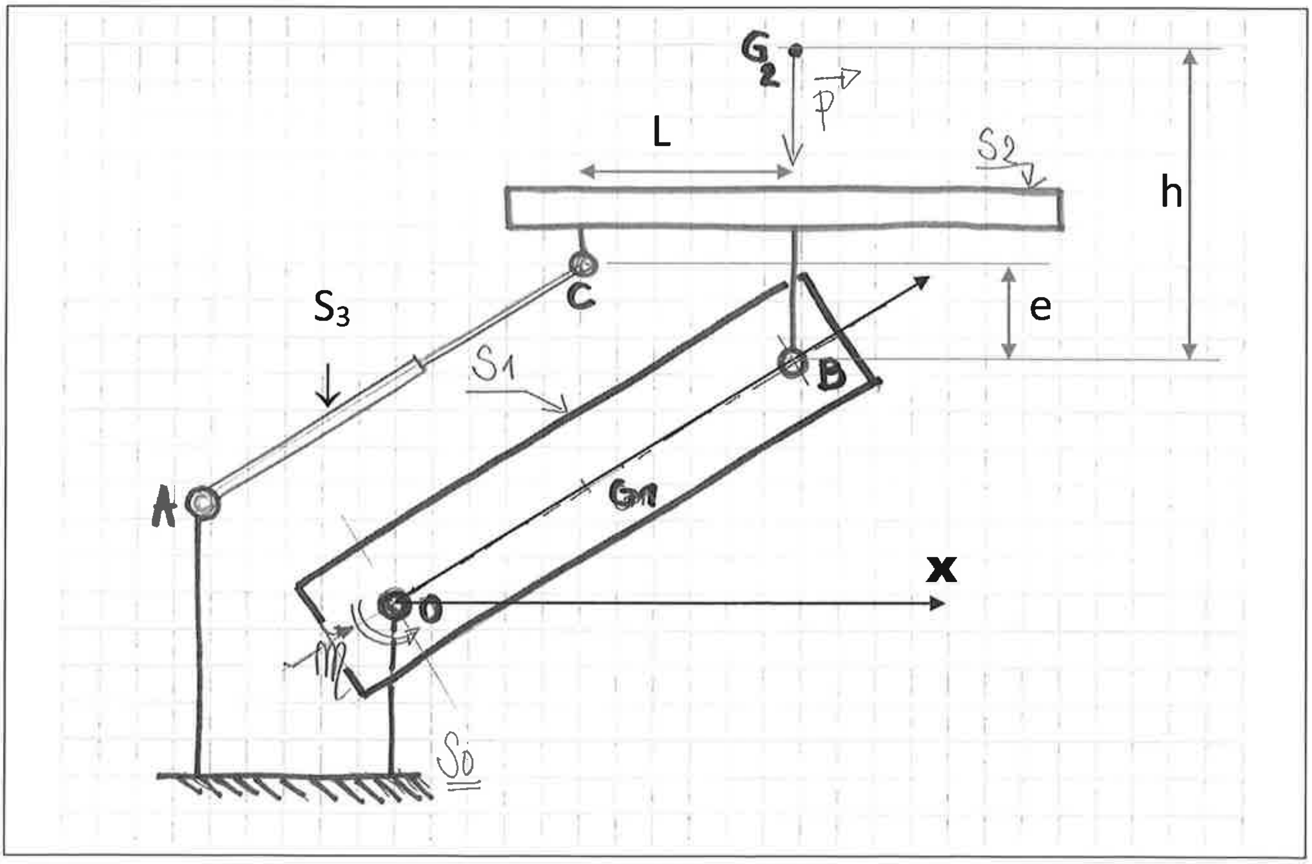
Dans une démarche de projet, on cherche à dimensionner un élévateur

Le cahier des charges nous indique :

- La charge à soulever : 2000 kg
- Temps de levage : le plus court possible.
- Hauteur à monter : 1,05 m

Hypothèses et pré-dimensionnement :

- On décompose le mouvement en deux mouvements : une rotation uniformément accélérée, puis une uniformément décélérée, de même débattement angulaire.
- Les bras ont une longueur entre axes de 1,20 m
- Le bras en position basse est horizontal.
- Le bras principal a une longueur de 1,40, constitué d'un tube acier carré (7800 kg/m3) 120x120, épaisseur 4 mm, 14,2 kg/ml , Tubes en acier TSE 235
  Cordon intérieur de soudure non raclé
  Non ébavurés
- Le plateau est constitué d'un cadre en acier tubulaire carré 40x40, épaisseur 2mm, dimension 600x600, recouvert d'une tôle épaisseur 2
- Le moteur entraine donc le bras principal en rotation.
- On cherche à dimensionner le moteur si la durée est de 6s, 3s ou 1s.
- Peut-on avoir décollement de la charge ?

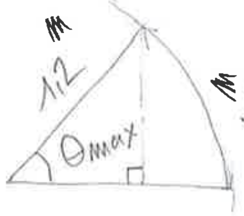


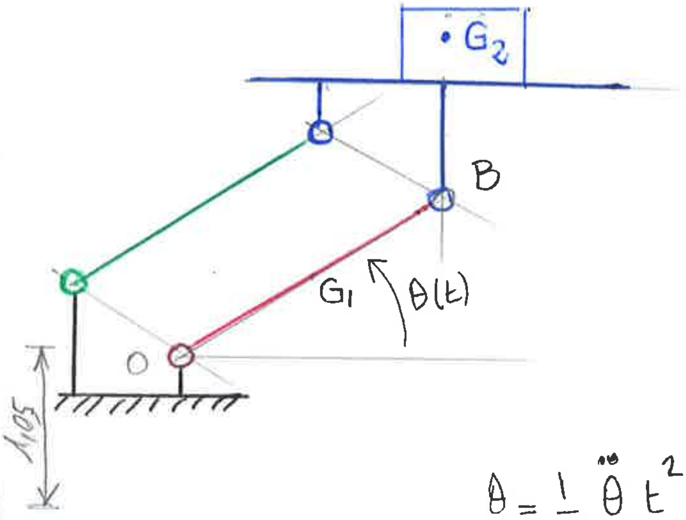
Mvt 1 → Rotation / exe fixe

Mvt 2 → Translation

Paramétrage

θ max ?





$$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}\, t^2$$

$$\sin \theta max = \frac{1{,}05}{1{,}2} \Rightarrow \theta max = 61°.$$

Mouvement accéléré : 30,5°. en 3s $\rightarrow \ddot{\theta} = \frac{2\theta}{t^2} = \frac{61°}{180} \times \pi \times \frac{1}{9}$

$\ddot{\theta}_{3s} \rightarrow 0{,}118$ rd/s²

$\ddot{\theta}_{1,5s} \rightarrow 0{,}473$ rd/s²

$\ddot{\theta}_{0,5s} \rightarrow 4{,}259$ rd/s²

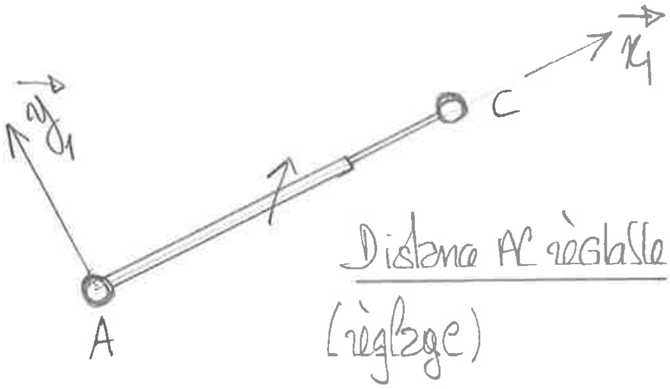
Caractéristiques du mouvement

Paramétrage

Elevateur

Elevateur

AC est une "bielette"



Distance AC réglable

(réglage)

Isolons AC.

Bilan des actions.

$$\left\{ XA_{03}\,\vec{x}_1 + YA_{03}\,\vec{y}_1 \,;\, \vec{0} \right\}_A$$

$$\left\{ XC_{23}\,\vec{x}_1 + YC_{23}\,\vec{y}_1 \,;\, 0 \right\}_C.$$

$\Sigma \vec{F} = m \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G/Rg}}$. si m négligeable $\Rightarrow \Sigma \vec{F} = \vec{0}$.

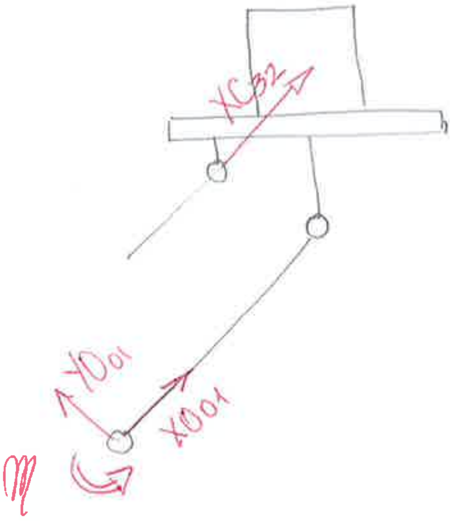
$\Sigma \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/A} = \overrightarrow{\delta_A(S/Rg)}$. si m negligeable $= \Sigma \overrightarrow{\mathcal{M}} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ $\boxed{XA_{03} + XC_{23} = 0.}$

Etude de la bielette S3

Calcul de $\mathcal{M}$

Si on isole le tout



4 inconnues
3 équations.
le mouvement est connu.

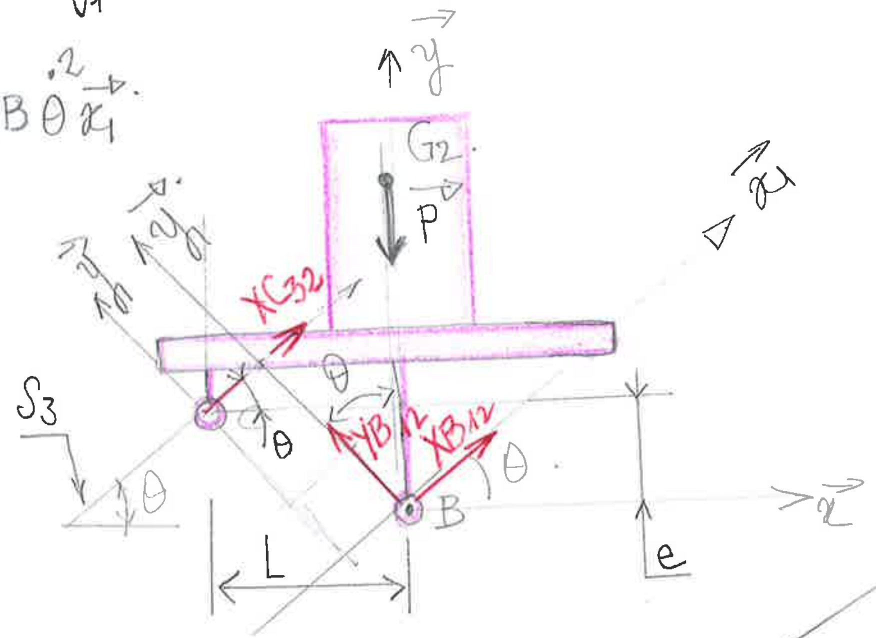
Si on isole que S_2

3 inconnues sthéniques
0 inconnue cinématique ($\theta, \dot\theta, \ddot\theta$ connus).

$$\vec{V}_{G_2/R_g} = \vec{V}_{B/R_g} = OB\,\dot\theta\,\vec{y}_1$$

$$\vec{\Gamma}_{G_2/R_g} = OB\,\ddot\theta\,\vec{y}_1 - OB\,\dot\theta^2\,\vec{x}_1$$

Bilan :



barré (mouvement plan)

$$\{\mathcal{L}_{B_{12}}\} = \left\{ XB_{12}\,\vec{x}_1 + YB_{12}\,\vec{y}_1 + \cancel{ZB_{12}}\,\vec{z}_1 \,;\, \cancel{LB_{12}}\,\vec{x}_1 + \cancel{MB_{12}}\,\vec{y}_1 + 0\,\vec{z} \right\}_B$$

$$\{\mathcal{L}_{C_{32}}\} = \left\{ XC_{32}\,\vec{x}_1 + \underbrace{\cancel{YC_{32}}}_{=0}\,\vec{y}_1 + \cancel{ZC_{32}}\,\vec{z}_1 \,;\, \cancel{LC_{12}}\,\vec{x}_1 + \cancel{MB_{12}}\,\vec{y}_1 + 0\,\vec{z} \right\}_C$$

$$\{\text{Poids}\} = \left\{ -m_2 g\,\vec{y} \,;\, 0 \right\}_{G_2} = \left\{ -mg\cos\theta\,\vec{y}_1 - mg\sin\theta\,\vec{x}_1 \,;\, \vec{0} \right\}_{G_2}$$

Principe fondamental appliqué à S_2

En B le plus d'inconnues.

$$\{\mathcal{F}_{ext} \to S_2\} = \{\mathcal{D}\, S_2/R_g\} = \{m_2 \vec{\Gamma}_{G_2/R_g} \; ; \; \vec{\delta}_B(S_2/R_g)\}.$$

$$\{\mathcal{L}_{B_{12}}\} = \{XB_{12}\,\vec{x}_1 + YB_{12}\,\vec{y}_1 \; ; \; \vec{0}\}_B.$$

$$\{\mathcal{L}_{C_{32}}\} = \{XC_{32}\,\vec{x}_1 \; ; \; \vec{0}\}_C = \{XC_{32}\,\vec{x}_1 \; ; \; -XC_{32}(e\cos\theta + L\sin\theta)\,\vec{z}\}_B$$

$$\vec{M}_B = \vec{M}_C + \vec{BC} \wedge \vec{R} \qquad (\vec{z} = \vec{z}_1)$$

$$\begin{vmatrix} -(L\cos\theta - e\sin\theta) \\ e\cos\theta + L\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{b1} \wedge \begin{vmatrix} XC_{32} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{b1}$$

$$\{Poids\} = \{-m_2 g\,\vec{y} \; ; \; \vec{0}\}_{G_2} = \{-m_2 g\cos\theta\,\vec{y}_1 - m_2 g\sin\theta\,\vec{x}_1 \; ; \; \vec{0}\}_B$$

Torseur dynamique : $\{\mathcal{D}\, S_2/R_g\} = \{m_2 \cdot \vec{\Gamma}_{G_2/R_g} \; ; \; \vec{\delta}_B(S_2/R_g)\}_B$

$$\{-m_2\, OB\, \dot\theta^2\,\vec{x}_1 + m_2\, OB\, \ddot\theta\,\vec{y}_1 \; ; \; h\, m_2\, OB(\ddot\theta\sin\theta + \dot\theta^2\cos\theta)\,\vec{z}\}$$

$$\vec{\delta}_B(S_2/R_g) = \vec{\delta}_{G_2}(S_2/R_g) + \vec{BG_2} \wedge m_2 \vec{\Gamma}_{G_2/R_g}.$$

$$\vec{\delta}_B(S_2/R_g) = \vec{0} + h\,\vec{y}_1 \wedge m_2(OB\,\ddot\theta\,\vec{y}_1 - OB\,\dot\theta^2\,\vec{x}_1)$$

$$\vec{\delta}_B(S_2/R_g) = h\, m_2\, OB(\ddot\theta\sin\theta + \dot\theta^2\cos\theta)\,\vec{z}.$$

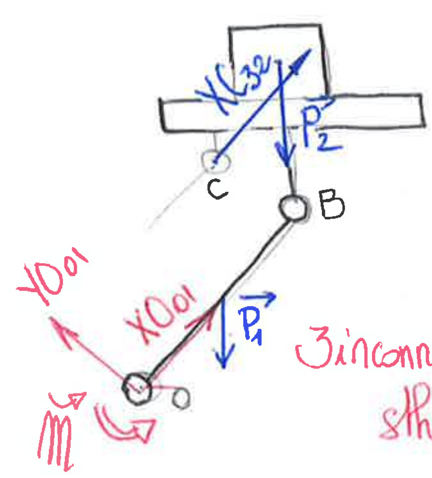
projections sur $\vec{x}_1$, $\vec{y}_1$, $\vec{z}_1$

$$\begin{cases} XB_{12} + XC_{32} - m_2 g\sin\theta = -m_2\, OB\, \dot\theta^2 \\ YB_{12} - m_2 g\cos\theta = m_2\, OB\, \ddot\theta \\ -XC_{32}(e\cos\theta + L\sin\theta) = h\, m_2\, OB(\ddot\theta\sin\theta + \dot\theta^2\cos\theta) \end{cases}$$

$$\boxed{XC_{32} = -\frac{h\, m_2\, OB\,(\ddot\theta\sin\theta + \dot\theta^2\cos\theta)}{(e\cos\theta + L\sin\theta)}}$$

Remarque : en statique XC_{32} serait nul.

Isole $\{S_1 + S_2\}$



3 inconnues sthéniques

Bilan
$$\{Moteur\} = \{\vec{0}\ ;\ \vec{M}\}$$

Poids
$$\{-m_1 g \vec{y}\ ;\ \vec{0}\}_{G_1}$$
$$\{-m_2 g \vec{y}\ ;\ \vec{0}\}_{G_2}$$
$$\{\mathcal{L}O_{01}\} = \{XO_{01}\,\vec{x}_1 + YO_{01}\,\vec{y}_1\ ;\ \vec{0}\}_O$$
$$\{\mathcal{L}C_{32}\} = \{XC_{32}\,\vec{x}_1\ ;\ \vec{0}\}_C$$

On écrit simplement le théorème du moment dynamique projeté sur l'axe en rotation $(\vec{z})$, en O.

Actions en O :

$$\{Moteur\} = \{\vec{0},\ \vec{M}\}$$
$$\{Poids\} = \{-m_1 g \vec{y}\ ;\ -m_1 . g . \frac{OB}{2} \cos\theta\, \vec{z}\}_O$$
$$\{Poids\} = \{-m_2 g \vec{y}\ ;\ -m_2 g\ OB \cos\theta\, \vec{z}\}_O$$
$$\{\mathcal{L}O_{01}\} = \{XO_{01}\,\vec{x}_1 + YO_{01}\,\vec{y}_1\ ;\ \vec{0}\}_O$$
$$\{\mathcal{L}C_{32}\} = \{XC_{32}\,\vec{x}_1\ ;\ \vec{OC} \wedge XC_{32} . \vec{x}_1\}_O$$
$$= \{XC_{32}\,\vec{x}_1\ ;\ -XC_{32}\,(L\sin\theta + e\cos\theta)\,\vec{z}\}_O$$

Mt dynamique :

$$\overrightarrow{\delta_O}(S_1/R_g) + \overrightarrow{\delta_O}(S_2/R_g) = \overrightarrow{\delta_O}(S_1 \cup S_2/R_g)$$

$$\overrightarrow{\delta_O}(S_1/R_g) = I_{Oz} \cdot \ddot{\theta}\, \vec{z}$$ En effet le point O est fixe $\Rightarrow$ axe fixe Oz.

$$\overrightarrow{\delta_O}(S_2/R_g) = \overrightarrow{\delta_{G_2}}(S_2/R_g) + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2 \overrightarrow{\Gamma_{G_2/R_g}}$$

$$\overrightarrow{\delta_G}(S_2/R_g) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_G}(S_2/R_g)\right]_{R_g} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\sigma_G}(S_2/R_g) = I_{Gz} \cdot \underbrace{\overrightarrow{\Omega_{S_2/R_g}}}_{\vec{0}\ \forall t}$$

$$\overrightarrow{\delta_O}(S_2/R_g) = (OB\, \vec{x}_1 + h\, \vec{y}) \wedge (OB\, \ddot{\theta}\, \vec{y} - OB\, \dot{\theta}^2 \vec{x}_1)\, m_2$$

$$= m_2\, OB^2\, \ddot{\theta}\, \vec{z} + m_2\, h\, OB\, \ddot{\theta} \sin\theta\, \vec{z} + m_2\, h\, OB\, \dot{\theta}^2 \cos\theta\, \vec{z}$$

$$\overrightarrow{\delta_O}(S_1 \cup S_2/R_g) = (I_{Oz} + m_2\, OB^2 + m_2\, h\, OB \sin\theta)\ddot{\theta}\, \vec{z} + m_2\, h\, OB \cos\theta\, \dot{\theta}^2\, \vec{z}$$

Théorème du moment dynamique projeté sur $\vec{x}$:

$$\Rightarrow \mathcal{M} - \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g\, OB \cos\theta - X_{C_{32}}(L \sin\theta + e\cos\theta)$$
$$= (I_{Oz} + m_2\, OB^2 + m_2\, h\, OB \sin\theta)\ddot{\theta} + m_2\, h\, OB \cos\theta\, \dot{\theta}^2$$

avec $X_C = -\, h\, m_2\, OB\, (\ddot{\theta} \sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta) / (e\cos\theta + L\sin\theta)$

$$\Rightarrow \mathcal{M} - \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g\, OB \cos\theta + \cancel{h\, m_2\, OB\, \ddot{\theta} \sin\theta} + \cancel{h\, m_2\, OB\, \dot{\theta}^2 \cos\theta}$$
$$= (I_{Oz} + m_2\, OB^2)\ddot{\theta} + \cancel{m_2\, h\, OB \sin\theta\, \ddot{\theta}} + \cancel{m_2\, h\, OB \cos\theta\, \dot{\theta}^2}.$$

$$\boxed{\mathcal{M} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g\, OB \cos\theta + (I_{Oz} + m_2\, OB^2)\ddot{\theta}}$$