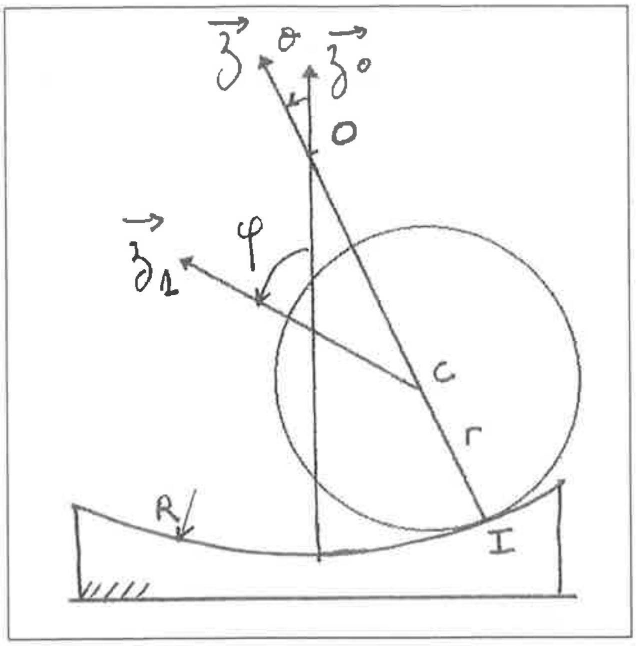
Un cylindre de masse m, de moment d'inertie ICx, de rayon r, roule sans glisser sur un autre cylindre fixe (galiléen) de rayon R, dans le champ de pesanteur g.

Rechercher l'équation de mouvement du cylindre à partir des théorèmes généraux, et déterminer la période des oscillations dans le cas de petits mouvements. Discuter de l'apparition de glissement au contact. On note f le coefficient de frottement entre les deux solides.

Les paramètres de position sont les deux angles $\varphi(t)$ et $\theta(t)$.



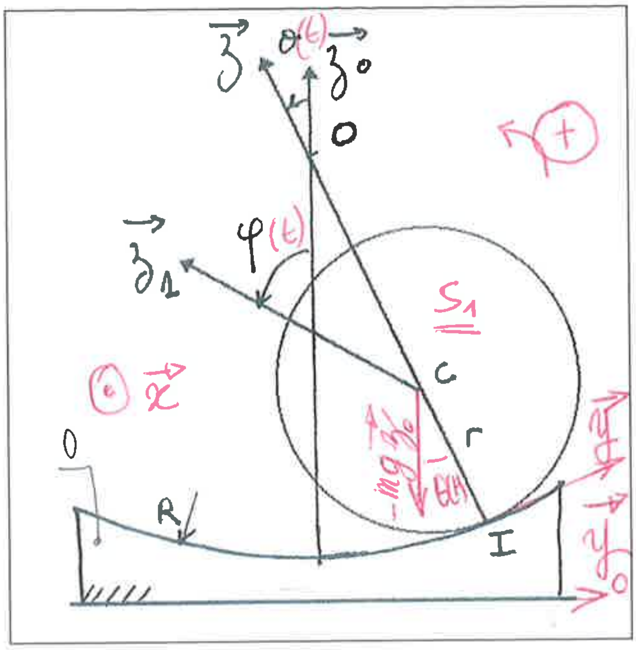
- Exprimer le vecteur rotation de S par rapport au référentiel galiléen R_0.
- Ecrire les conditions de roulement sans glissement reliant les paramètres $\varphi(t)$ et $\theta(t)$.
- Isoler le solide S, faire le bilan des actions mécaniques appliquées au solide
- Projeter sur l'axe de rotation x le théorème du moment dynamique appliqué au solide.
- En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement de $\theta(t)$.
- Trouver la période T du mouvement de petites variations de $\theta(t)$.
- Ecrire le théorème de la résultante dynamique, projeter sur y et z ; à quelle condition de $\theta(t)$ la composante normale de l'action de contact est-elle nulle ?
- Conclure.

Question : L'axe est fixe NON

La direction de l'axe est fixe ? NON *

Rotation ou translation ? Rotation / $C\vec{x}$

$\Rightarrow$ le théorème du moment dynamique devrait nous donner l'équation de mouvement



* voir annexe (en fait, si !)

1) Paramétrage :

2 paramètres primitifs $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ liés entre eux si S_1 roule sans glisser

liaison entre ces 2 paramètres ? .

$$\vec{\Omega}(\vec{x},\vec{y},\vec{z}/R_0) = \dot{\theta}\,\vec{x}$$
$$\vec{\Omega}(S1/R_0) = \dot{\varphi}\,\vec{x}$$

$$\vec{V}_{I \in 1/0} = \vec{0} \quad (RSG)$$

O est fixe $\quad \vec{OC} = -(R-r)\vec{z}$

$$\vec{V}_{C/0} = -(R-r)\,.\,\dot{\theta}\,\vec{x} \wedge \vec{z}$$
$$\vec{V}_{C/0} = (R-r)\,\dot{\theta}\,\vec{y}$$

$$\vec{V}_{C \in S_1/0} = \vec{V}_{C/0}$$

$$\vec{V}_{I \in S_1/0} = \vec{V}_{C \in S_1/0} + \vec{IC} \wedge \vec{\Omega}_{S1/0}$$
$$= (R-r)\dot{\theta}\,\vec{y} + r\vec{z} \wedge \dot{\varphi}\,\vec{x} = \left[(R-r)\dot{\theta} + r\dot{\varphi}\right]\vec{y}$$

Les conditions de roulement sans glissement sont :

$$(R-r)\dot{\theta} + r\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = -\frac{R-r}{r}\,\dot{\theta} \qquad RSG(1)}$$

$\Rightarrow$ le solide S_1 est maintenant paramétré ,

2) Equation de mouvement.

On isole le solide S_1.

Bilan des actions :

Rappels

$\overrightarrow{\sigma_A}(S/R_g) = \overrightarrow{\sigma_G}(S/R_g) + \overrightarrow{AG} \wedge m \overrightarrow{V_{G/R_g}}$

$\overrightarrow{\sigma_A}(S/R_g) = J_{Ax} \cdot \dot{\psi}\, \vec{x} + m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R_g}}$

$\overrightarrow{\delta_A}(S/R_g) = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_A}(S/R_g)\right]_{R_g} + m\, \overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge \overrightarrow{V_{G/R_g}}$

Poids : $\left\{-mg\,\vec{z}_0\, ;\ \vec{0}\right\}_C$

Contact avec frottement : $\left\{Z_{I01}\,\vec{z} + Y_{I01}\,\vec{y} + X_{I01}\,\vec{x}\ ,\ \boxed{\vec{0}}\right\}_I$

Ici on n'utilise pas le torseur de liaison ponctuelle ni de linéaire rectiligne (frottem^{ts})

En I, la somme des moments de forces extérieurs ne comporte pas d'inconnues de liaison.

$\Rightarrow$ On écrit la projection sur $\vec{x}$ du théorème des moment dynamique en I.

$$(\overrightarrow{IC} \wedge -mg\,\vec{z}_0) \cdot \vec{x} = \overrightarrow{\delta_I}(S_1/0) \cdot \vec{x}$$

$$+ r \sin\theta\, mg =$$

$$\overrightarrow{\sigma_C}(S_1/0) = J_{Cx} \cdot \dot{\varphi}\, \vec{x}$$

$(R-r)\dot{\theta}\,\vec{y}$

$$\overrightarrow{\sigma_I}(S_1/0) = J_{Cx}\,\dot{\varphi}\,\vec{x} + (-r\vec{z}) \wedge m\, \overrightarrow{V_{C/0}}$$ Car C centre de masse S_1

$$= J_{Cx}\,\dot{\varphi}\,\vec{x} - m(R-r)\,r\,\dot{\theta}\,\vec{x}$$

$$\overrightarrow{\sigma_I}(S_1/0) \overset{(1)}{=} \left(-\frac{m r^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{R-r}{\cancel{r}} - mr(R-r)\right)\dot{\theta}\,\vec{x} \qquad \dot{\varphi} = -\frac{R-r}{r}\,\dot{\theta}$$

$$= -\frac{3}{2}\, m r (R-r)\, \dot{\theta}\, \vec{x}$$

$$\overrightarrow{\delta_I}(S_1/0) = -\frac{3}{2}\, m r (R-r)\, \ddot{\theta}\, \vec{x} + m \cdot \overrightarrow{V_{I/0}} \wedge \overrightarrow{V_{C/0}}$$

Equ. mvt $\Rightarrow \frac{3}{2}(R-r)\ddot{\theta} + g \sin\theta = 0 \qquad (2)$

L'équation de mouvement est donc :

$$\frac{3}{2}(R-r)\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

Si on linéarise pour de petits mouvements :

$$\frac{3}{2}(R-r)\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)}\theta = 0.$$

De la forme : $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$

$$\omega^2 = \frac{2g}{3(R-r)} \qquad \omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

$\theta = A\cos(\omega t + \varphi_1)$

ou $\theta = B\sin(\omega t + \varphi_2)$

ou $\theta = C\sin\omega t + D\cos\omega t$.

Théorème de la résultante dynamique :

$$\vec{V}_{C/0} = (R-r)\dot{\theta}\,\vec{y} \qquad \vec{\Gamma}_{C/0} = (R-r)\ddot{\theta}\,\vec{y} + (R-r)\dot{\theta}\cdot\dot{\theta}\,\vec{x}\wedge\vec{y}$$

$$\vec{\Gamma}_{C/0} = (R-r)\ddot{\theta}\,\vec{y} + (R-r)\dot{\theta}^2\,\vec{z}$$

Projections sur la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$\vec{x}$: $XI_{01} = 0$.

$\vec{y}$: $YI_{01} - mg\sin\theta = m(R-r)\ddot{\theta}$ Composante tangentielle de $\vec{I_{0\to1}}$

$\vec{z}$: $ZI_{01} - mg\cos\theta = m(R-r)\dot{\theta}^2$ Composante normale de $\vec{I_{0\to1}}$

$\Rightarrow YI_{01} = m(R-r)\ddot{\theta} + mg\sin\theta$

$\Rightarrow ZI_{01} = m(R-r)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$.

$$ZI_{01} > 0 \Rightarrow \dot{\theta}^2 > -\frac{mg\cos\theta}{m(R-r)}$$

Condition pour que l'action normale soit nulle. $= 0$ si $\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{(R-r)}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta < 0$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$N = mg\cos\theta + m(R-r)\dot{\theta}^2$ mini si $\dot{\theta} = 0$ et θ maxi.

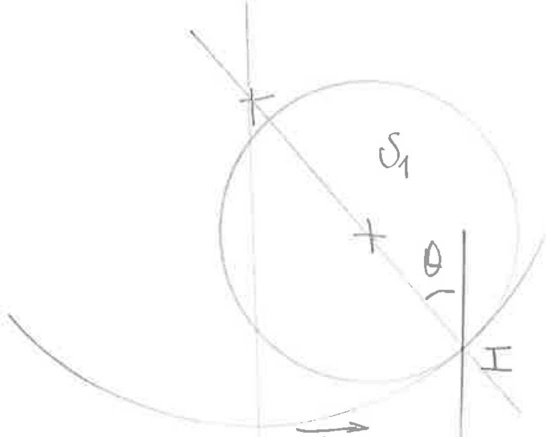
$$\left.\begin{aligned} &T = m(R-r)\ddot{\theta} + mg\sin\theta \\ &(2)\quad m(R-r)\ddot{\theta} = -\frac{2mg\sin\theta}{3} \end{aligned}\right\} T = \frac{1}{3}mg\sin\theta.$$

$\frac{T}{N} < \tan\varphi$. $\quad \frac{1/3\,\cancel{mg}\sin\theta}{\cancel{mg}\cos\theta} < \tan\varphi \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{3}\tan\theta < \tan\varphi}$

mini

$\Rightarrow \left(\frac{T}{N}\right)_{max}$.

* Annexe.



$\overrightarrow{V_{I \in S1/0}} = \vec{0}$

I peut être considéré fixe (à t)
$I\vec{x}$ est alors fixe.

Roulement sans glissement

$$\overrightarrow{\delta_I(S_{1/0})} = I_{Ix} \cdot \ddot{\varphi}\, \vec{x}.$$

$$= \left(\frac{Mr^2}{2} + Mr^2\right) \ddot{\varphi}\, \vec{x}$$

$$= -\frac{3}{2} M r^{\cancel{2}} \cdot \frac{R-r}{\cancel{r}}\, \ddot{\theta}\, \vec{x} = -\frac{3}{2}\, m\, r\,(R-r)\, \ddot{\theta}\, \vec{x}.$$