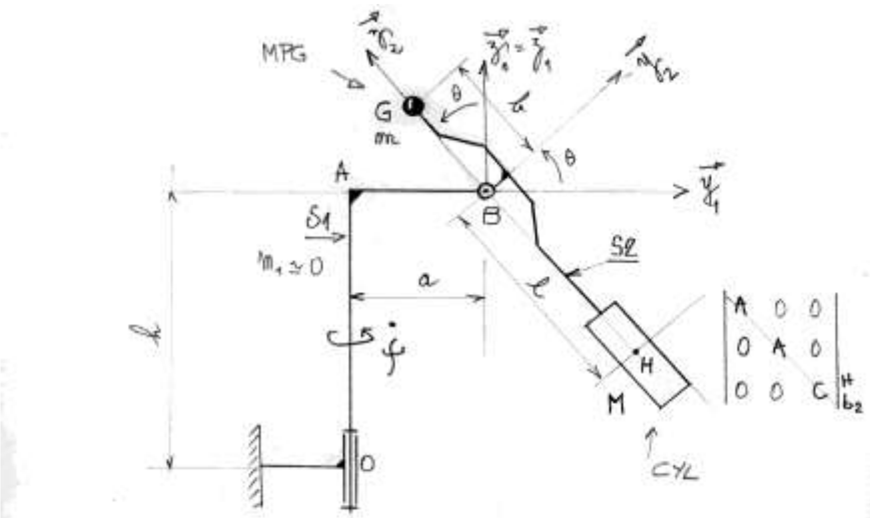
On cherche à identifier les actions centrifuges sur un solide soumis à deux mobilités $\psi(t)$ et $\theta(t)$

- S_0 le support
- S_1 le mat en pivot avec le support $(O, \mathbf{z_0}) = (O, \mathbf{z_1})$
- S_2 le solide constitué d'une armature de masse négligeable, d'une masselotte en G de masse m, d'un cylindre de centre H de masse M, de matrice d'inertie sur ses axes de diagonale (A, A, C)

Le paramétrage est représenté ci-contre.

- On appelle MPG la masse ponctuelle en G.
- H est le centre de gravité du cylindre.

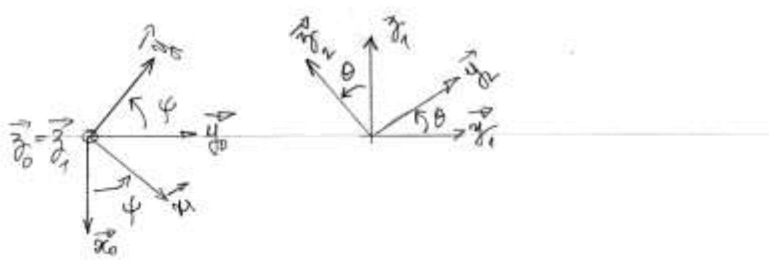
Selon le type de problème on sera amené à appliquer le principe fondamental de la dynamique complètement ou partiellement.



On peut, par exemple :

Chercher à dimensionner la liaison B : dans ce cas on isole S_2 et on applique le principe fondamental de la dynamique à ce solide.

Connaitre le comportement du solide oscillant S_2, sans chercher à connaitre les actions de liaisons en B. C'est l'équation de moment autour de B $\mathbf{x_2}$ qui nous sera utile. Cette équation est appelée *équation de mouvement*. Dans ce cas on isole S_2 et on écrit le théorème du moment dynamique projeté sur l'axe de rotation. Une seule équation à écrire au lieu de 6.



On obtient alors une *équation différentielle* du deuxième ordre qu'il faudra résoudre à l'aide d'outils informatiques si nécessaire.

Comportement du solide oscillant S_2

On isole S_2

Bilan des actions mécaniques

- Action de la pesanteur sur la masse ponctuelle $\{- m\, g\, \mathbf{z_0} ; \mathbf{0}\}_G$
- Action de la pesanteur sur le cylindre $\{- M\, g\, \mathbf{z_0}; \mathbf{0}\}_H$
- Action du solide S1 sur le solide S2 : $\{XO_{21}\, \mathbf{x} + YO_{21}\, \mathbf{y} + ZO_{21}\, \mathbf{z} ; 0\, \mathbf{x} + MO_{21}\, \mathbf{y} + NO_{21}\, \mathbf{z}\}_B$

On remarque que sur $\mathbf{x_2}$ il n'y a pas d'inconnue sthénique

- Action de frottement visqueux dans la liaison pivot : $\{\mathbf{0}; - \mu\, \theta°\}$

L'**équation du mouvement** est une équation mathématique décrivant le mouvement d'un objet physique.

En général, l'**équation du mouvement** comprend l'accélération de l'objet en fonction de sa position, de sa vitesse, de sa masse et de toutes variables affectant l'une de celle-ci. Cette équation est surtout utilisée en mécanique classique et est normalement représentée sous la forme de coordonnées sphériques, coordonnées cylindriques oucoordonnées cartésiennes et respecte les lois du mouvement de Newton.

Théorème du moment dynamique projeté sur l'axe de la liaison pivot ($\bullet\ x_2$) :

$$\Sigma\, \overrightarrow{\mathcal{M}t_B}\, \overrightarrow{Fext} \to S2 \bullet \vec{x}_2 = \overrightarrow{\delta_B(S2/R_g)} \bullet \vec{x}_2$$

Premier terme de l'égalité : $m\, g\, b \sin\theta - M\, g\, l \sin\theta - \mu\, \theta°$ (pas d'action de liaison)

Deuxième terme de l'égalité :

Le moment dynamique du solide S2 est égal à la somme des moments dynamiques des deux masses.

$$\overrightarrow{\delta_B}(S2/Rg) = \overrightarrow{\delta_B}(MPG/Rg) + \overrightarrow{\delta_B}(CYL/Rg)$$

Et on prendra que la projection sur x_2

Comment calculer delta B ?

(5) puis (3) puis (1), ou bien (5) puis (7) puis (2), ou bien (4) puis (1)

Il est en général plus simple de calculer le moment cinétique en G ou en un point fixe, de l'amener au point considéré en utilisant l'équiprojectivité (transport), puis de dériver.

$$\overrightarrow{\delta_B}(MPG/Rg) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_B}(MPG/Rg)\right]_{Rg} + m\,\overrightarrow{V}_{B/Rg} \wedge \overrightarrow{V}_{G/Rg} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{\delta_B}(MPG/Rg) = \overrightarrow{\delta_G}(MPG/Rg) + \overrightarrow{BG} \wedge m\,\overrightarrow{\Gamma}_{G/Rg} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{\sigma_B}(MPG/Rg) = \overrightarrow{\sigma_G}(MPG/Rg) + \overrightarrow{BG} \wedge m \cdot \overrightarrow{V}_{G/Rg} \quad (3)$$

$$\overrightarrow{\sigma_B}(MPG/Rg) = \mathbb{I}_B \cdot \overrightarrow{\Omega}_{2/Rg} + m \cdot \overrightarrow{BG} \wedge \overrightarrow{V}_{B\in S2/Rg} \quad (4)$$

$$\overrightarrow{\sigma_G}(MPG/Rg) = \mathbb{I}_G \cdot \overrightarrow{\Omega}_{2/Rg} + \overrightarrow{GG} \wedge m\,\overrightarrow{V}_{G/Rg} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{\delta_B}(MPG/Rg) = \overrightarrow{\delta_G}(MPG/Rg) + \overrightarrow{BG} \wedge m \cdot \overrightarrow{\Gamma}_{G/Rg} \quad (6)$$

$$\overrightarrow{\delta_G}(MPG/Rg) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_G}(MPG/Rg)\right]_{Rg} + m\,\overrightarrow{V}_{G/Rg} \wedge \overrightarrow{V}_{G/Rg} \quad (7)$$

Termes dont nous aurons besoin.

$$\overrightarrow{\Omega}_{1/Rg} = \dot{\psi}\,\overrightarrow{z_0} = \dot{\psi}\,\overrightarrow{z_1} \qquad \overrightarrow{\Omega}_{2/Rg} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{x_1} + \dot{\psi}\,\overrightarrow{z_1} \qquad \overrightarrow{\Omega}_{2/Rg} \begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{vmatrix}_2$$

$$\overrightarrow{V}_{B/Rg} = \overrightarrow{V}_{B\in 1/Rg} = -a\dot{\psi}\,\overrightarrow{x_2} = -a\dot{\psi}\,\overrightarrow{x_1}$$

$$\overrightarrow{V}_{G/Rg} = -(a - b\sin\theta)\dot{\psi}\,\overrightarrow{x_2} - b\dot{\theta}\,\overrightarrow{y_2}$$

$$\overrightarrow{V}_{H/Rg} = -(a + \ell\sin\theta)\dot{\psi}\,\overrightarrow{x_2} + \ell\dot{\theta}\,\overrightarrow{y_2}$$

Moment dynamique en B de la masse ponctuelle, projeté sur l'axe de la liaison pivot

$$\vec{\sigma}_G(MPG/R_g) = \mathbb{I}_G(MPG)\,\vec{\Omega}_{2/R_g} + m.\vec{GG} \wedge \vec{V}_{G \in MPG/R_g}$$

$$\vec{\sigma}_G(MPG/R_g) = \vec{0}$$ *masse ponctuelle ⇒ matrice nulle en G*

$$\vec{\sigma}_B(MPG/R_g) = \vec{\sigma}_G(MPG/R_g) + \vec{BG} \wedge m\,\vec{V}_{G/R_g} =$$

$$m\ {}_2\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ b \end{matrix}\right. \wedge\ {}_2\left|\begin{matrix} +(a-b\sin\theta)\dot{\psi} \\ -b\dot{\theta} \\ 0 \end{matrix}\right. \quad {}_2\left|\begin{matrix} +b^2\dot{\theta}m \\ -(a-b\sin\theta)bm\dot{\psi} \\ 0 \end{matrix}\right.$$

$$\vec{\delta}_B(MPG/R_g) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_B(MPG/R_g)\right]_2 + \vec{\Omega}_{2/R} \wedge \vec{\sigma}_B(MPG/R_g) + m\vec{V}_{B/R_g} \wedge \vec{V}_{G/R_g}$$

$${}_2\left|\begin{matrix} +b^2\ddot{\theta}m \\ \text{—} \\ \text{—} \end{matrix}\right. \quad {}_2\left|\begin{matrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{matrix}\right. \quad {}_2\left|\begin{matrix} +b^2\dot{\theta}m \\ -(a-b\sin\theta)bm\dot{\psi} \\ 0 \end{matrix}\right. + \ {}_2\left|\begin{matrix} -a\dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. \wedge\ {}_2\left|\begin{matrix} -b\dot{\theta} \\ -(\\ 0 \end{matrix}\right.$$

$$\vec{\delta}_B(MPG/R_g) \cdot \vec{x}_2 = +mb^2\ddot{\theta} + mb(a-b\sin\theta)\dot{\psi}^2\cos\theta$$

Moment dynamique en B du cylindre projeté sur l'axe de la liaison pivot

$$\vec{\sigma}_H(CYL/R_g) = \bar{\bar{I}}_{H\,CYL} \cdot \vec{\Omega}_{2/R_g} + M\,\vec{HH} \wedge \vec{V}_{H\in CYL/R_g}$$

H CDG du cylindre

$$= \left|\begin{matrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{matrix}\right|_2 \left|\begin{matrix} \dot\theta \\ \dot\psi\sin\theta \\ \dot\psi\cos\theta \end{matrix}\right._2$$

$$\vec{\sigma}_H(CYL/R_g) = \left|\begin{matrix} A\dot\theta \\ A\dot\psi\sin\theta \\ C\dot\psi\cos\theta \end{matrix}\right._2$$

$$\vec{\sigma}_B(CYL/R_g) = \vec{\sigma}_H(CYL/R_g) + \vec{BH} \wedge m\,\vec{V}_{H/R_g} =$$

$$\left|\begin{matrix} A\dot\theta \\ A\dot\psi\sin\theta \\ C\dot\psi\cos\theta \end{matrix}\right._2 + \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -\ell \end{matrix}\right._2 \wedge M \left|\begin{matrix} -(a+\ell\sin\theta)\dot\psi \\ \ell\dot\theta \\ 0 \end{matrix}\right._2 \quad \left|\begin{matrix} A\dot\theta + M\ell^2\dot\theta \\ A\dot\psi\sin\theta + M\ell(a+\ell\sin\theta)\dot\psi \\ C\dot\psi\cos\theta \end{matrix}\right._2$$

$$\vec{\delta}_B(CYL/R_g) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{B/R_g}\right]_2 + \vec{\Omega}_{2/R_g} \wedge \vec{\sigma}_B(CYL/R_g) + M\,\vec{V}_{B/R_g} \wedge \vec{V}_{H/R_g}$$

$$\left|\begin{matrix} (A+M\ell^2)\ddot\theta \\ — \\ — \end{matrix}\right._2 + \left|\begin{matrix} \dot\theta \\ \dot\psi\sin\theta \\ \dot\psi\cos\theta \end{matrix}\right._2 \wedge \left|\begin{matrix} (A+M\ell^2)\dot\theta \\ A\dot\psi\sin\theta + M\ell(a+\ell\sin\theta)\dot\psi \\ C\dot\psi\cos\theta \end{matrix}\right._2 + M \left|\begin{matrix} -a\dot\psi \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right._2 \wedge \left|\begin{matrix} — \\ — \\ — \end{matrix}\right._2$$

$$\vec{\delta}_B(CYL/R_g) = (A+M\ell^2)\ddot\theta + C\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta - A\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta - M\dot\psi^2\ell(a+\ell\sin\theta)\cos\theta$$

Remarque : on ne calcule pas les composantes dont on n'a pas besoin.

Sauf erreur :

$$(A + mb^2 + M\ell^2)\ddot{\theta} + \left[mb(a - b\sin\theta)\cos\theta + (C - A - M\ell(a + \ell\sin\theta)\cos\theta)\right]\dot{\psi}^2$$

$$= (mb - M\ell)\, g \sin\theta - \mu\dot{\theta}$$

$$(\quad)\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + (M\ell - mb)\, g\sin\theta = (\qquad\qquad)\dot{\psi}^2$$

En régime établi : $\ddot{\theta} = 0 \; ; \; \dot{\theta} = 0$

équilibre : $\theta_{\text{équil}} = f(\dot{\psi}^2)$