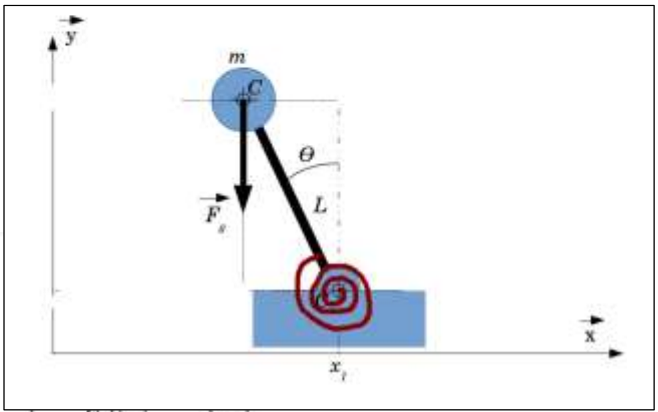
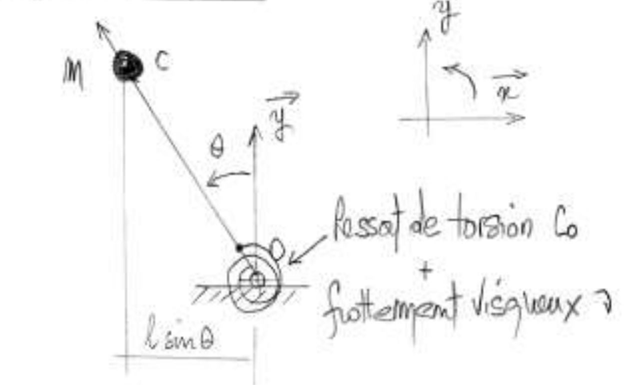
1 - Pendule inversé

Déterminer l'équation différentielle décrivant le mouvement du pendule

- Masse m ponctuelle en C
- $\overrightarrow{OC}$ = L $\overrightarrow{y1}$
- Ressort raideur Co en N.m/rd
- Pivot en O.
- Frottement visqueux en O υ en N.m.s/rd
- OC = L



1) Pendule inversé



$$\begin{Bmatrix} X_O & L_O \\ Y_O & M_O \\ Z_O & 0 \end{Bmatrix}_O \quad \text{Pivot en O}$$

$$\left\{ \vec{0} \;;\; -C_o\,\theta\,\vec{z} \right\} \quad \text{Ressort}$$

$$\left\{ \vec{0} \;;\; -\nu\,\dot{\theta}\,\vec{z} \right\} \quad \text{frott visqueux}$$

Résolution :

PFD : Projection sur $\vec{z}$ du théorème du moment dynamique

$$mL^2\ddot{\theta} = mg\,L\sin\theta - C_o\,\theta - \nu\,\dot{\theta}$$

$$mL^2\,\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} + (C_o - mgL)\,\theta = 0 \quad \text{si } \sin\theta \simeq \theta \text{ quand } \theta \text{ petit}$$

- pendule inversé -

Théorème énergie - Puissance.

$Ec(S/R_g) = \frac{1}{2} m . \vec{V}_{C/R_g}^{2}$ ou $\frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\theta}^2$ (masse ponctuelle).

$Ec(S/R_g) = \frac{1}{2} . mL^2\dot{\theta}^2$

$\mathcal{P}(\text{poids} \to S/R_g) = \left\{-mg\vec{y} ; \vec{0}\right\}_C \otimes \left\{\dot{\theta}\vec{z} ; -L\dot{\theta}\vec{x_1}\right\} = mgL\sin\theta\,\dot{\theta}$

$\mathcal{P}(\text{pivot} \to S/R_g) = 0$

$\mathcal{P}(\text{Ressort} \to S/R_g) = \left\{\vec{0} ; -C_0\theta\vec{z}\right\} \otimes \left\{\dot{\theta}\vec{z} ; \vec{0}\right\}_O = -C_0\theta\dot{\theta}$

$\mathcal{P}(\text{frot} \to S/R_g) = \left\{\vec{0} ; -\nu\dot{\theta}\vec{z}\right\} \otimes \left\{\dot{\theta}\vec{z} ; \vec{0}\right\}_O = -\nu\dot{\theta}^2$

– pendule inversé –

$\Rightarrow mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = mgL\sin\theta\,\dot{\theta} - C_0\theta\dot{\theta} - \nu\dot{\theta}^2$

$\Rightarrow mL^2\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} + (C_0 - mgL)\theta = 0$

Conservation de l'énergie :

$Ec(S/R_g) = \frac{1}{2} mL^2\dot{\theta}^2$

$Ep(S/R_g) = mgL\cos\theta + \frac{1}{2} C_0\theta^2$

$\frac{d}{dt} Ec(S/R_g) + \frac{d}{dt} Ep(S/R_g) = \mathcal{P}(f_{nc} \to S/R_g)$

$mL^2\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} - mgL\sin\theta\,\cancel{\dot{\theta}} + C_0\theta\cancel{\dot{\theta}} = -\nu\dot{\theta}^{\cancel{2}}$

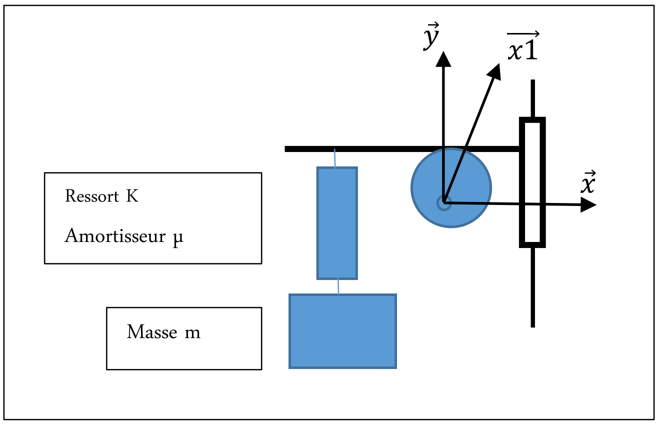
$\Rightarrow mL^2\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} + (C_0 - mgL)\theta = 0$ si θ petit

– pendule inversé –

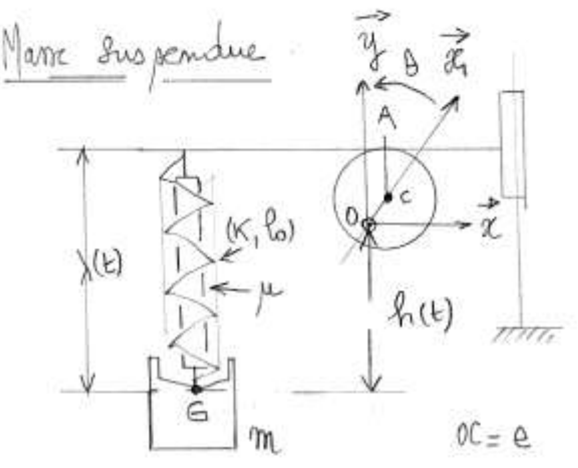
2 – Masse suspendue

Déterminer l'équation différentielle décrivant le mouvement de la masse m

- Masse m ponctuelle
- Ressort raideur K en N/m
- Amortisseur coefficient µ en N.s/m
- Came rayon R, excentricité e
- g pesanteur
- Bâti galiléen, $\vec{y}$ ascendant



2) Masse suspendue



Bilan des actions sur le solide

$\left\{ -mg\,\vec{y}\ ;\ \vec{0} \right\}$ poids

$\left\{ K(\lambda - \lambda_0)\,\vec{y}\ ;\ \vec{0} \right\}$ Ressort

$\left\{ \mu\,\dot{\lambda}\,\vec{y}\ ;\ \vec{0} \right\}$ Amortisseur.

PFD Théorème de la résultante dynamique projeté sur $\vec{y}$.

$$m\,\vec{\Gamma}_{G/R_g}\cdot\vec{y} = -m\,\ddot{h}(t)$$

$$h(t) = \lambda - R - e\cos\theta$$
$$\dot{h}(t) = \dot{\lambda} + e\dot{\theta}\sin\theta$$
$$\ddot{h}(t) = \ddot{\lambda} + e\ddot{\theta}\sin\theta + e\dot{\theta}^2\cos\theta$$

$$\sum \vec{F}_{ext \to S}\cdot\vec{y} = -mg + K(\lambda(t) - \lambda_0) + \mu\,\dot{\lambda}(t)$$

à l'équilibre : $mg = K(\lambda_e - \lambda_0)$

$$\Rightarrow \quad -K\lambda_e + \cancel{K\lambda_0} + K\lambda(t) - \cancel{K\lambda_0} + \mu\dot{\lambda} = \sum \vec{F}_{ext \to S}\cdot\vec{y}$$

$$-m\ddot{h}(t) = K(h(t) + R + e\cos\theta - \lambda_e) + \mu(\dot{h}(t) - e\dot{\theta}\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{h}(t) + \mu\dot{h}(t) + K h(t) = K(\lambda_e - R) + \mu e\dot{\theta}\sin\theta - K e\cos\theta$$

Masse suspendue

Masse suspendue

Énergie Puissance

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{h}^2$$

$\mathcal{F}$ $\qquad$ $\mathcal{V}$

$$\mathcal{P}(\text{poids} \to S/_R) = \left\{ -mg\vec{y} ; \vec{0} \right\}_G \otimes \left\{ \vec{0} ; -\dot{h}\vec{y} \right\}_G = mg\dot{h}$$

$$\mathcal{P}(\text{ressort} \to S/_R) = \left\{ K(\lambda - \lambda_0)\vec{y} ; \vec{0} \right\}_G \otimes \left\{ \vec{0} ; -\dot{h}\vec{y} \right\}_G = -\dot{h}K(\lambda - \lambda_0)$$

$$\mathcal{P}(\text{amort}^r \to S/_R) = \left\{ \mu\dot{\lambda}\vec{y} ; \vec{0} \right\}_G \otimes \left\{ \vec{0} ; -\dot{h}\vec{y} \right\}_G = -\dot{h}\mu\dot{\lambda}$$

masse suspendue

$$\Rightarrow m\cancel{\dot{h}}\ddot{h} = mg\cancel{\dot{h}} - \cancel{\dot{h}}K(\lambda - \lambda_0) - \cancel{\dot{h}}\mu\dot{\lambda} . \qquad mg = K(\lambda_e - \lambda_0)$$

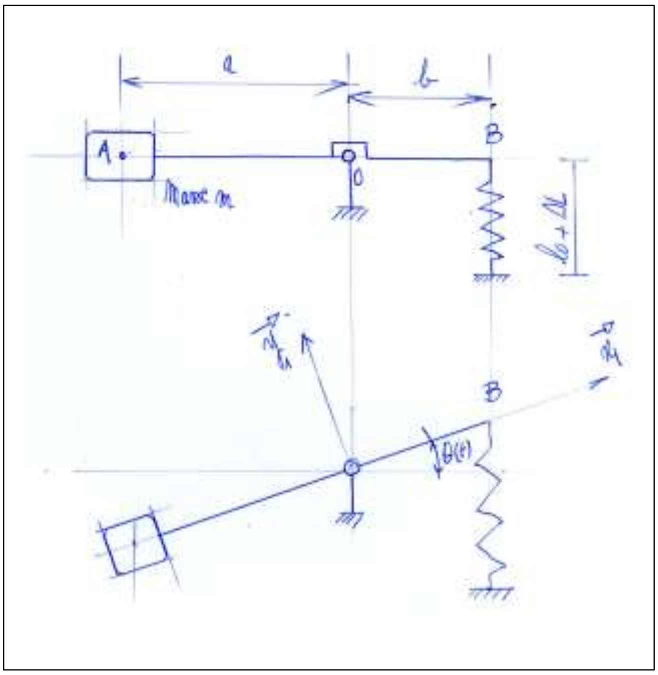
$$m\ddot{h} = K(\lambda - \lambda_e) - \mu\dot{\lambda}$$

Même équation $\qquad m\ddot{h} + \mu\dot{h} + Kh = K(\lambda_e - R) + \mu e\dot{\theta}\sin\theta - Ke\cos\theta$

3 – Vibration d'une barre

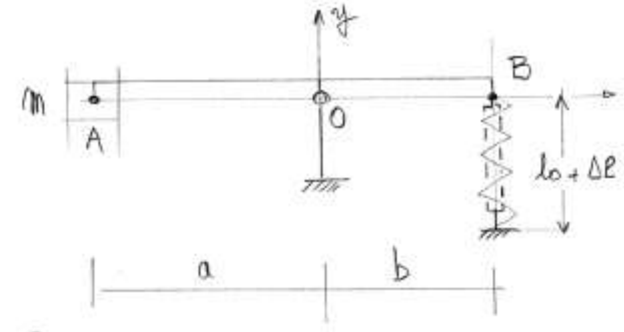
Déterminer l'équation différentielle décrivant le mouvement de la barre

- Masse m ponctuelle
- Ressort raideur K en N/m
- Amortisseur coefficient µ en N.s/m
- g pesanteur
- Bâti galiléen, $\vec{y}$ ascendant



1. Isoler le solide et déterminer en statique ΔL
2. Isoler le solide et déterminer l'équation de mouvement selon θ(t) en utilisant les théorèmes généraux.
3. Isoler le solide et déterminer l'équation de mouvement selon θ(t) en utilisant le théorème d'énergie-puissance.

3 - Vibration d'une barre.



Bilan des actions

$\left\{ -mg\vec{y} \; ; \; \vec{0} \right\}_A$ poids

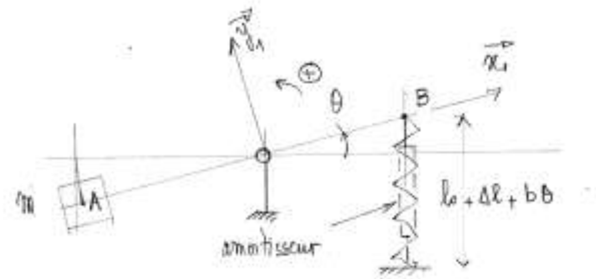
$\left\{ \begin{matrix} X_O & L_O \\ Y_O & M_O \\ Z_O & 0 \end{matrix} \right\}_O$ pivot

$\left\{ -K\,\Delta l\,\vec{y} \; ; \; \vec{0} \right\}_B$ Ressort.

PFS :

$\sum \vec{M}_O\, F_{ext \to S} \cdot \vec{z} = 0$

$mga - K\,\Delta l\, b = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta l = \dfrac{a\,m\,g}{bK}.$



Bilan des actions

$\left\{ -mg\vec{y} \; ; \; \vec{0} \right\}_A$ poids

$\left\{ \begin{matrix} X_O & L_O \\ Y_O & M_O \\ Z_O & 0 \end{matrix} \right\}_O$ Pivot.

$\left\{ -K(\Delta l + b\theta)\vec{y} \; ; \; \vec{0} \right\}$ Ressort

$\left\{ -\mu\, b\dot{\theta}\,\vec{y} \; ; \; \vec{0} \right\}$ Amortisseur.

θ petit $\Rightarrow \sin\theta \simeq \theta \qquad \cos\theta \simeq 1$

PFD Théorème du moment dynamique projeté sur $\vec{z}$.

$\vec{\delta}_O(S/R) \cdot \vec{z} = m a^2 \ddot{\theta}$ (axe fixe $O\vec{z}_1$)

$\sum \vec{M}_O\, f_{ext \to S} \cdot \vec{z} = + mga\underbrace{\cos\theta}_{1} - bK\underbrace{\Delta l}_{\left(\frac{amg}{bK}\right)} - b^2\theta K - b\mu b\dot{\theta}$

$= mga - bK\dfrac{amg}{bK} - b^2\theta K - \mu b^2\dot{\theta}$

$m a^2 \ddot{\theta} + \mu b^2 \dot{\theta} + K b^2 \theta = 0$

- vibration d'une barre -

- vibration d'une barre -

Théorème énergie - puissance.

$$E_c(S/R_g) = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2$$

$$\mathcal{P}(\text{poids} \to S/R_g) = \left\{ -mg\vec{y} \,;\, \vec{0} \right\}_A \otimes \left\{ \dot{\theta}\vec{z} \,;\, -a\dot{\theta}\vec{y_1} \right\}_A = +mga\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\mathcal{P}(\text{ressort} \to S/R_g) = \left\{ -K(\Delta l + b\theta)\vec{y} \,;\, \vec{0} \right\}_B \otimes \left\{ \dot{\theta}\vec{z} \,;\, b\dot{\theta}\vec{y_1} \right\}_B = -K(\Delta l + b\theta)b\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\mathcal{P}(\text{pivot} \to S/R_g) = \begin{Bmatrix} X_0 & L_0 \\ Y_0 & M_0 \\ Z_0 & 0 \end{Bmatrix}_0 \otimes \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\theta} & 0 \end{Bmatrix}_0 = 0.$$

$$\mathcal{P}(\text{amortisseur} \to S/R_g) = \left\{ -\mu b\dot{\theta}\vec{y} \,;\, \vec{0} \right\}_B \otimes \left\{ \dot{\theta}\vec{z} \,;\, b\dot{\theta}\vec{y_1} \right\}_B = -\mu b^2\dot{\theta}^2\cos\theta$$

- Vibration d'1 barre -

$$\Rightarrow m a^2 \cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} = mga\cancel{\dot{\theta}}\cancel{\cos\theta} - K(\Delta l + b\theta)b\cancel{\dot{\theta}}\cancel{\cos\theta} - \mu b^2 \dot{\theta}^{\cancel{2}}\cancel{\cos\theta}.$$

$$m a^2 \ddot{\theta} = mga - K\Delta l b - Kb^2\theta - \mu b^2\dot{\theta}$$

$$\Delta l = \frac{amg}{bK} \quad \Rightarrow \quad m a^2 \ddot{\theta} + \mu b^2 \dot{\theta} + K b^2 \theta = 0.$$

Conservation de l'énergie.

$$E_c(S/R_g) = \tfrac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2$$

$$E_p(f_{ext_c} \to S) = \frac{1}{2} K(\Delta l + b\theta)^2 - mga\theta$$

$$\frac{d}{dt} \Rightarrow m a^2 \cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} - mga\cancel{\dot{\theta}} + K\Delta l b\cancel{\dot{\theta}} + Kb^2\theta\cancel{\dot{\theta}} = -\mu b^2 \dot{\theta}^{\cancel{2}} \cos\theta.$$

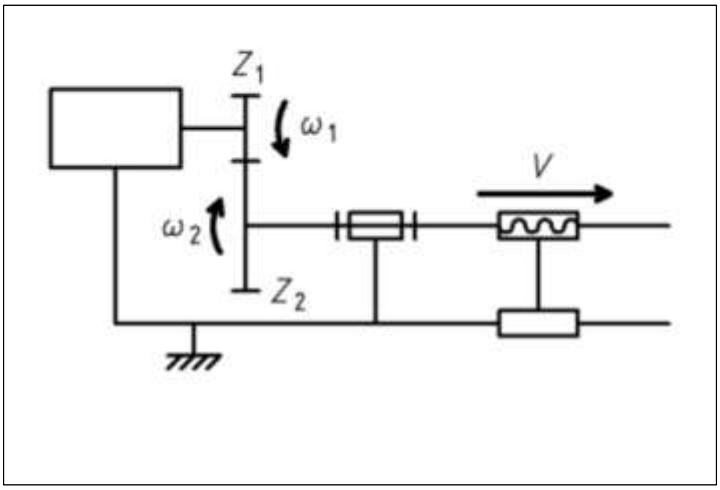
$$\Rightarrow m a^2 \ddot{\theta} - \cancel{mga} + \cancel{Kb\Delta l} + Kb^2\theta + \mu b^2 \dot{\theta} = 0$$

$$m a^2 \ddot{\theta} + \mu b^2 \dot{\theta} + K b^2 \theta = 0$$

- Vibration d'une barre -

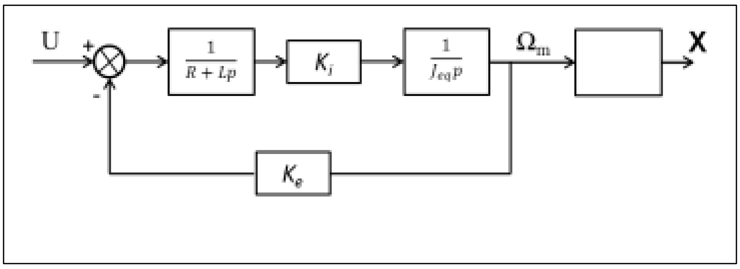
4 – Transformation de mouvement

Dans le servomoteur schématisé ci-contre, le moteur électrique entraîne un engrenage. L'arbre de sortie de l'engrenage engendre un mouvement de translation à l'aide d'un système vis-écrou.



- Le moteur a une inertie sur son axe Jm
- Les roues ont une inertie sur leurs axes respectifs J1 et J2
- La vis a une inertie sur son axe Jv, un pas égal à p, un seul filet.
- Le coulisseau a une masse M

1. Compléter le schéma bloc ci-contre
2. En écrivant que l'énergie cinétique totale = la somme des énergies cinétiques, déterminer l'expression de l'énergie cinétique équivalente Jeq



4) Transformation de mouvement.

On écrit l'énergie cinétique.

$$\frac{1}{2} J_M \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_1 \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_2 \underset{-r\omega_m}{\underset{\uparrow}{\omega_v^2}} + \frac{1}{2} J_v \cdot \underset{-r\omega_m}{\underset{\uparrow}{\omega_v^2}} + \frac{1}{2} m \cdot v^2 .$$

$$\frac{\omega_v}{\omega_m} = -\frac{Z_1}{Z_2} = -r.$$

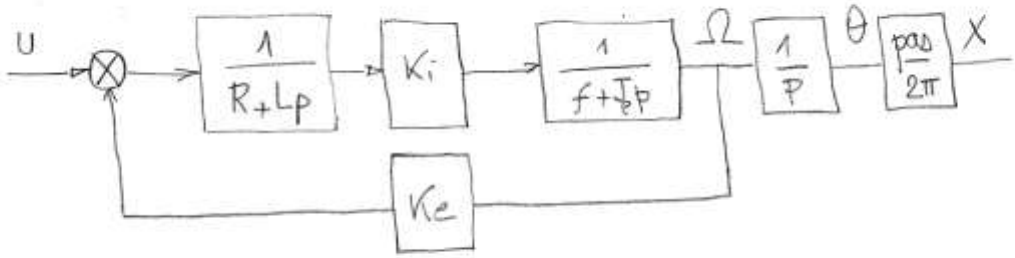
$v = ?$ la vis fait 1 tour $\to$ pas.

1 rd $\to \frac{pas}{2\pi}$ (pas réduit)

$$\Rightarrow |v| = \frac{pas}{2\pi} \cdot \omega_m \cdot r$$

transformation de mouvement

$$2 E_C = \left[J_M + J_1 + (J_2 + J_v) r^2 + m \left(\frac{pas}{2\pi} \cdot r \right)^2 \right] \omega_m^2 .$$

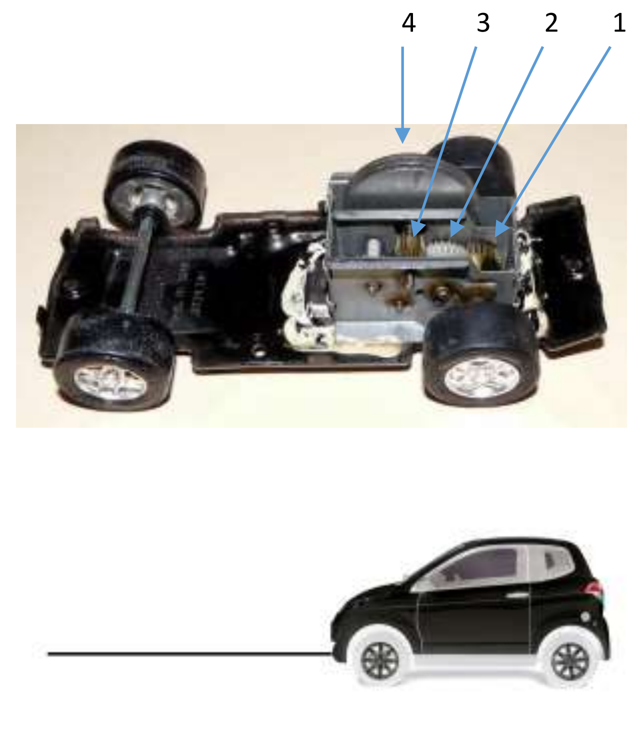


5 – Transformation de mouvement

Cette voiture emmagasine de l'énergie cinétique en la faisant rouler. Les roues arrière sont liées à la roue 1. Celle-ci entraine le pignon-roue 2 (pignon et roue accolées).   La roue 2 entraine le pignon 3 et les disques d'inertie 4.

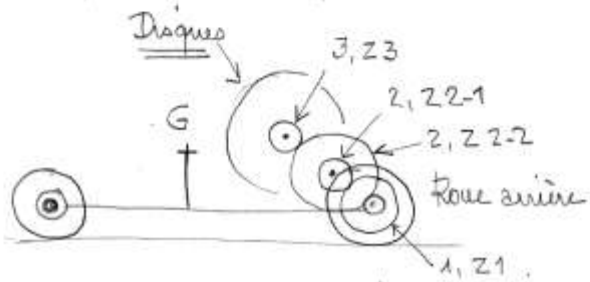
On tire sur cette voiture horizontalement avec une ficelle. En supposant qu'il y a assez de forces de frottement entre les roues et le sol :

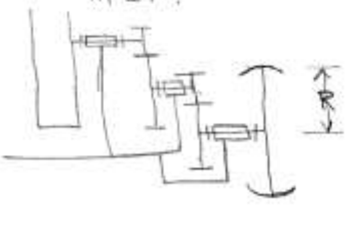
1. Faire le schéma cinématique.
2. Déterminer la masse équivalente de l'ensemble.
3. Déterminer l'accélération de la voiture.



Transformation de mouvement / masse équivalente.

Schéma





$$2E_c = m \cdot v^2 + J \omega^2_{Disques}.$$

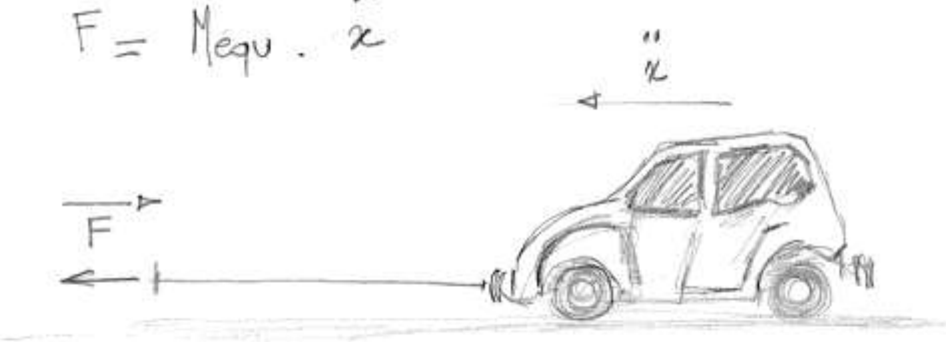
$$\omega_{roue} = \frac{v}{R}$$

$$\frac{\omega_D}{\omega_R} = + \frac{Z_1}{Z_{21}} \frac{Z_{22}}{Z_3} \qquad \omega_D = \frac{v}{R} \cdot \frac{Z_1}{Z_{21}} \frac{Z_{22}}{Z_3}.$$

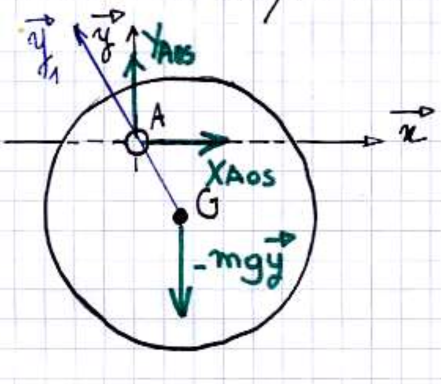
$$2E_c = m\ v^2 + J_D\ \frac{v^2}{R^2} \left(\frac{Z_1\ Z_{22}}{Z_{21}\ Z_3}\right)^2 = \frac{1}{2}\ M_{équ} \cdot v^2.$$

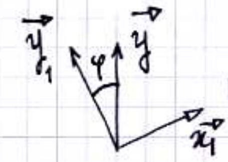
$$M_{EQU} = m_{Totale} + \frac{J_D}{R^2} \left(\frac{Z_1\ Z_{22}}{Z_{21}\ Z_3}\right)^2$$

$$F = M_{équ} \cdot \ddot{x}$$



Etude du disque oscillant





$b_0 = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$AG = e$

masse m

Isolons le disque :

Il est soumis en A à l'action du bâti par la liaison pivot

$$\begin{Bmatrix} X_{A0S} & - \\ Y_{A0S} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{A,b_0}$$

et il est soumis au poids $-mg\vec{y}$ en G.

L'énergie cinétique $Ec(S/R_g) = \frac{1}{2}\left\{ \mathcal{V}_{S/R_g} \right\} \otimes \left\{ \mathcal{C}_{S/R_g} \right\}$.

$$Ec(S/R_g) = \left\{ \dot{\varphi}\vec{z} \, ; \, e\dot{\varphi}\vec{x}_1 \right\}_G \otimes \left\{ m e \dot{\varphi} \vec{x}_1 \, ; \, J_G \dot{\varphi} \vec{z} \right\}_G \cdot \frac{1}{2}$$

$$Ec(S/R_g) = \frac{1}{2}\left[J_G + m e^2\right] \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} J_A \dot{\varphi}^2$$

(En calculant $Ec(S/R_g)$ par le point A, on trouve $J_A \dot{\varphi}^2$)

$$\frac{d}{dt} Ec(S/R_g) = J_A \dot{\varphi} \ddot{\varphi}$$

$$\mathcal{P}_{\text{fext} \to S} = \{\mathcal{F}\} \otimes \{\mathcal{V}\}$$

choisissons A $\Rightarrow \left\{ - \, ; \, \vec{AG} \wedge \vec{P} \right\} \otimes \left\{ \dot{\varphi}\vec{z} \, ; \, \vec{0} \right\}_A = -e\dot{\varphi}\sin\varphi \, mg$

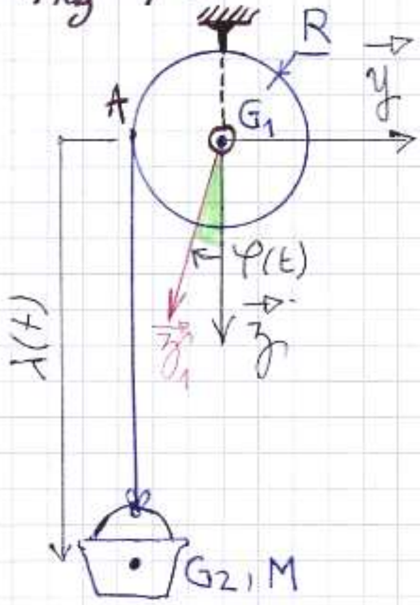
$\Rightarrow$ l'équation de mouvement : $J_A \ddot{\varphi} + e\varphi mg = 0$
dans l'hypothèse des
petites oscillations.

Si frottement visqueux $\{\mathcal{P}_{\text{frott}}\} = \left\{ - \, ; \, -f\dot{\varphi}\vec{z} \right\}_A \otimes \left\{ \dot{\varphi}\vec{z} \, ; \, \vec{0} \right\}_A$

$$J_A \ddot{\varphi} + f\dot{\varphi} + emg\,\varphi = 0$$

le système étudié est composé de 2 solides : le treuil S_1 et le seau S_2.

$$\vec{\Omega}_{S_1/R_g} = \dot{\varphi}\,\vec{x}$$



$\varphi(t)$ et $\lambda(t)$ paramètrent le système.

$\varphi(t)$ et $\lambda(t)$ sont liés.

$$\vec{V}_{A\in cable/R_g} = \vec{V}_{A\in treuil/R_g}$$

$$\dot{\lambda}\,\vec{z} = \vec{V}_{G_1/R_g} + \vec{AG_1} \wedge \vec{\Omega}_{S_1/R_g}$$

$$= \vec{0} + R\,\vec{y} \wedge \dot{\varphi}\,\vec{x}$$

$$\Rightarrow \dot{\lambda} = -R\dot{\varphi}$$

Calculons l'énergie cinétique de l'ensemble :

$$E_c = \frac{1}{2} m_2 \dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2} J_{G_1}(S_1).\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{d}{dt} E_c = m_2 \dot{\lambda}\ddot{\lambda} + J_{G_1}(S_1)\,\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = m_2 \dot{\lambda}\ddot{\lambda} + J_{G_1}(S_1).R^{-2}\dot{\lambda}\ddot{\lambda}$$

$$\frac{d}{dt} E_c = \left[\frac{J_{G_1}(S_1)}{R^2} + m_2\right]\dot{\lambda}\ddot{\lambda}$$

$$\mathcal{P}(F_{ext} \to S_1 \cup S_2/R_g) = m_2 . g . \dot{\lambda} \quad (\vec{P}.\vec{v})$$

$$\mathcal{P}(S_1 \longleftrightarrow S_2) = 0$$ (le fil ne glisse pas sur le treuil)

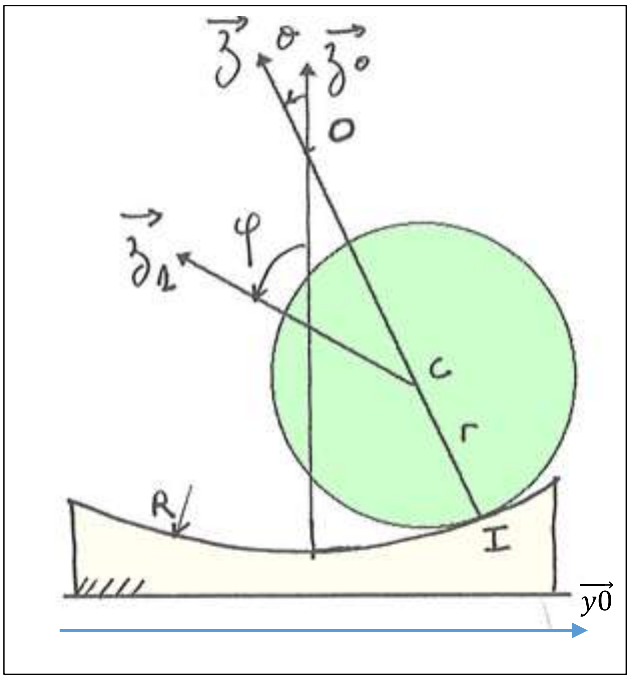
L'équation de mouvement s'écrit :

$$\left[\frac{J_{G_1}(S_1)}{R^2} + m_2\right]\ddot{\lambda} = m_2 . g \qquad \ddot{\lambda} = c^{te}$$

Un cylindre S_1, de masse m, de rayon r, roule **sans glisser** sur un autre cylindre fixe (galiléen) de rayon R, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$.

Rechercher l'équation de mouvement du cylindre à partir des théorèmes généraux, et déterminer la période des oscillations dans le cas de petits mouvements. Discuter de l'apparition de glissement au contact. On note f le coefficient de frottement entre les deux solides.

Les paramètres de position sont les deux angles $\varphi(t)$ et $\theta(t)$.



- Exprimer le vecteur rotation de la base (**x**, **y**, **z**) par rapport au référentiel galiléen R_0.
- Exprimer le vecteur rotation de S_1 par rapport au référentiel galiléen R_0.
- Ecrire les conditions de roulement sans glissement reliant les paramètres $\varphi(t)$ et $\theta(t)$.
- Isoler le solide S, faire le bilan des actions mécaniques appliquées au solide.

Théorèmes généraux

- Projeter sur l'axe de rotation x le théorème du moment dynamique appliqué au solide.
- En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement de $\theta(t)$.
- Trouver la période T du mouvement de petites variations de $\theta(t)$.
- Ecrire le théorème de la résultante dynamique, projeter sur y et z ; à quelle condition de $\theta(t)$ la composante normale de l'action de contact est-elle nulle ?
- Discuter de la condition d'apparition de glissement en I.

Energétique

- Ecrire le torseur cinématique galiléen de S1
- Ecrire le torseur cinétique galiléen de S1
- Calculer l'énergie cinétique du solide S1.
- Calculer la puissance galiléenne des actions extérieures au solide S1.
- Appliquer le théorème de l'énergie-puissance et retrouver l'équation de mouvement.

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\varphi}(t)\,\vec{x}_0$$

$$\vec{V}_{I\in 1/0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_{I\in 1/0} = \vec{V}_{C\in 1/0} + \vec{IC} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$$

$$= (R-r)\,\dot{\theta}\,\vec{y} + r\,\vec{z} \wedge \dot{\varphi}\,\vec{x}$$

$$\vec{V}_{I\in 1/0} = \left[(R-r)\,\dot{\theta} + r\,\dot{\varphi}\right]\vec{x} \qquad \dot{\varphi} = -\frac{(R-r)}{r}\,\dot{\theta}$$

Bilan des actions

Poids $\left\{-mg\,\vec{z}_0\,;\,\vec{0}\right\}_C$

Action de 0 sur 1 $\left\{Y_{I01}\,\vec{y} + Z_{I01}\,\vec{z}\,;\,\vec{0}\right\}_I$

$$\left\{\mathcal{V}_{S/R_g}\right\} = \left\{\dot{\varphi}\,\vec{x}\,;\,(R-r)\,\dot{\theta}\,\vec{y}\right\}_C = \left\{\dot{\varphi}\,x\,;\,\vec{0}\right\}_I$$

$$\left\{\mathcal{C}_{S/R_g}\right\} = \left\{m\,(R-r)\,\dot{\theta}\,\vec{y}\,;\,J_{Cx}\,\dot{\varphi}\,\vec{x}\right\}_C$$

$$\left\{\mathcal{F}_{ext\to S}\right\} = \left\{-mg\,\vec{z}_0 + Y_{I01}\,\vec{y} + Z_{I01}\,\vec{z}\,;\,+mg\,r\sin\theta\,\vec{x}\right\}_I$$

$$2E_C = \left\{\dot{\varphi}\,\vec{x}\,;\,(R-r)\,\dot{\theta}\,\vec{y}\right\}_C \otimes \left\{m\,(R-r)\,\dot{\theta}\,\vec{y}\,;\,J_{Cx}\,\dot{\varphi}\,\vec{x}\right\}_C$$

$$= J_{Cx}\,\dot{\varphi}^2 + m\,(R-r)^2\,\dot{\theta}^2$$

$$\mathcal{P} = \left\{\dot{\varphi}\,\vec{x}\,;\,\vec{0}\right\}_I \otimes \left\{-\,;\,mgr\sin\theta\,\vec{x}\right\}_I$$

$$\frac{d}{dt} Ec(S/R_g) = J_{Cx}\,\dot\varphi\,\ddot\varphi + m(R-r)^2\,\dot\theta\,\ddot\theta$$

$$\mathcal{P}_{F_{ext\to S}} = mgr\,\dot\varphi\sin\theta$$

$$\Rightarrow\ J_C\dot\varphi\ddot\varphi + \cancel{m(R-r)\left(-\frac{(R-r)}{r}\dot\theta\right)}\left(-\frac{(R-r)}{r}\theta\right.$$

$$J_{Cx}\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\cancel{\dot\theta}\,\ddot\theta + m(R-r)^2\cancel{\dot\theta}\,\ddot\theta = -mgr\,\frac{R-r}{r}\cancel{\dot\theta}\sin\theta$$

$$\frac{mr^2}{2}$$

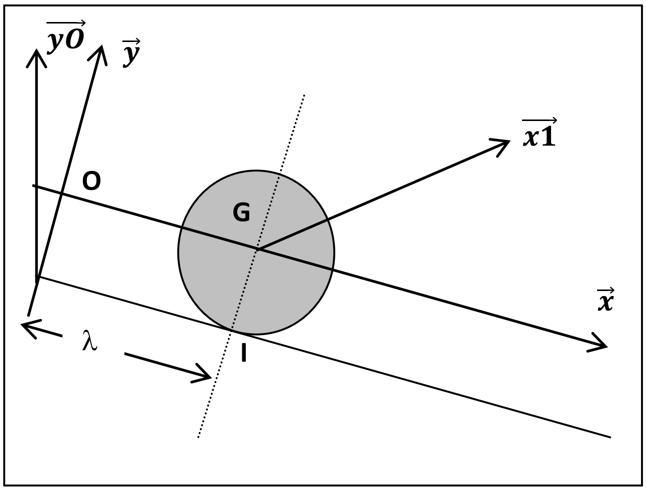
$$\frac{m\cancel{r^2}}{2}\cdot\frac{(R-r)^{\cancel{2}}}{\cancel{r^2}}\ddot\theta + \cancel{m}(R-r)^{\cancel{2}}\ddot\theta = -\cancel{m}g\cancel{r}\frac{\cancel{(R-r)}}{\cancel{r}}\sin\theta$$

$$\frac{3}{2}(R-r)\ddot\theta + g\sin\theta = 0$$

petites oscillations

$$\frac{3}{2}(R-r)\ddot\theta + g\,\theta = 0.$$

Déterminer l'équation de mouvement du cylindre roulant le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné de α avec l'horizontale .



Paramétrage : $\lambda(t)$ et $\varphi(t)$

Le déplacement se fait sur $\vec{x}$, $\lambda(t)$ étant le paramètre qui définit la position de G.

$\varphi(t) = (\vec{x}, \overrightarrow{x1})$ étant le paramètre définissant le changement d'orientation de S par rapport à Rg

La condition de roulement sans glissement $\overrightarrow{VI\in S/R} = \vec{0}$ nous donne la liaison entre les paramètres : $\lambda° = - r\ \varphi°$ et en dérivant $\lambda°° = - r\ \varphi°°$

Le théorème de l'énergie cinétique pour 1 solide se déplaçant par rapport à un référentiel galiléen s'écrit :

d/dt Ec(S/R) = P(ext$\rightarrow$S/R)

Calculons l'énergie cinétique du solide S : Ec(S/R) = ½ { V (S/R) } $\otimes$ { C (S/R) }

$$Ec(S/R) = \tfrac{1}{2} \{ \varphi° \vec{z} \,;\, \lambda° \vec{x} \}_G \otimes \{ m\,\lambda° \vec{x} \,;\, JG\,\varphi° \vec{z} \}_G$$
$$= \tfrac{1}{2} m\,\lambda°^2 + \tfrac{1}{2} JG\,\varphi°^2$$
$$d/dt\ Ec(S/R) = m\ \lambda°\,\lambda°° + JG\ \varphi°.\,\varphi°°$$

$$P(ext\rightarrow S/R) = \{ F\ ext \rightarrow S \}_I \otimes \{ V\ (S/R) \}_I = \{ YI_{OS}\,\vec{y} + XI_{OS}\,\vec{x} - mg\ \overrightarrow{yo} \,;\, - m\,g\,r\,\sin\alpha\,\vec{z} \}_I \otimes \{ \varphi° \vec{z} \,;\, \vec{0} \}_I$$

en remplaçant $\lambda°$ et $\lambda°°$: $(m\,r^2 + JG)\ \varphi°\ \ \varphi°° = - m\,g\,r\,\varphi°\ \sin\alpha$

$$\boxed{(m\,r^2 + JG)\ \varphi°° = - m\,g\,r\ \sin\alpha}$$

On peut utiliser aussi le fait que le système est conservatif, il n'y a pas de perte d'énergie durant le mouvement. Alors on peut écrire que :

Ec(S/R) + Ep(S/R) = constante.

Ec(S/R) = $\frac{1}{2} \{ \varphi° \vec{z} ; \lambda° \vec{x} \}_G \otimes \{ m \lambda° \vec{x} ; JG \varphi° \vec{z} \}_G$

= $\frac{1}{2} m \lambda°^2 + \frac{1}{2} JG \varphi°^2$

Ep(S/R) = $- m \vec{g}.\overrightarrow{OG} = - m \vec{g}. (\lambda \vec{x} + r \vec{y}) = m g r \cos\alpha - m g \lambda \sin\alpha$

En dérivant Ec(S/R) + Ep(S/R) = constante :

$m \lambda° \lambda°° + JG \varphi° \varphi°° - m g \lambda° \sin\alpha = 0$

En utilisant la liaison entre $\lambda°$ et $\varphi°$

$m (- r \varphi°) (- r \varphi°°) + JG \varphi° \varphi°° + m g r \varphi° \sin\alpha = 0$

$m r^2 \varphi°° + JG \varphi°° + m g r \sin\alpha = 0$

On obtient bien sûr le même résultat : $(mr^2 + JG) \varphi°° = - m g r \sin\alpha$

On peut aussi utiliser la variation d'énergie cinétique :

Ec (S/R) finale - Ec(S/R) initiale = Σ W F extérieures

Σ W F extérieures : somme des travaux des forces extérieures

Ec(S/R) initiale = 0

Ec(S/R) finale = $\frac{1}{2}$ m $\lambda°^2$ + $\frac{1}{2}$ JG $\varphi°^2$

$\frac{1}{2}$ m $\lambda°^2$ + $\frac{1}{2}$ JG $\varphi°^2$ - 0 = m g λ sinα

$\frac{1}{2}$ (m + JG/r²) $\lambda°^2$ = m g λ sinα

dérivons d/dt : (m + JG/r²) $\lambda°$ $\lambda°°$ = m g $\lambda°$ sinα

On obtient encore le même résultat : (m + JG/r²) $\lambda°°$ = m g sinα

Exercice 2 : Un camion de masse M à l'arrêt se met à descendre une pente inclinée de direction x orientée positive vers le bas, d'angle α avec l'horizontale ; on néglige tous les frottements sauf au contact roue-sol. Les roues roulent sans glisser. On néglige l'inertie des roues. Déterminer l'équation du mouvement de ce camion.

En isolant une roue, on trouve que l'action du sol Ni $\vec{y}$ sur une roue i est normale au sol (pas de moteur et pas de freinage, la roue est en équilibre :

(Σ F$\rightarrow$roue = 0 et Σ Mts$\rightarrow$roue = 0)

Ec(S/R) = ½ m λ°²

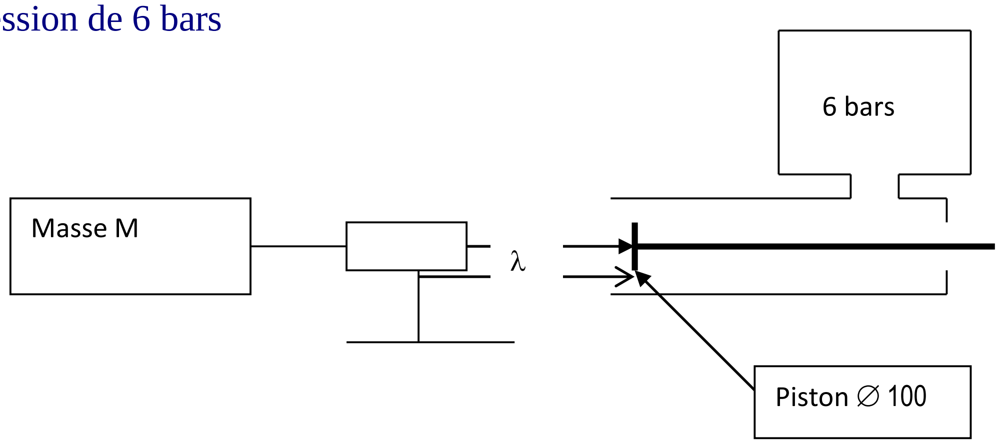
d/dt Ec(S/R) = P(Fint) + P(ext$\rightarrow$S/R)

d/dt Ec(S/R) = P(ext$\rightarrow$S/R) =

$(m\,g \sin\alpha\ \vec{x} - m\,g \cos\alpha\ \vec{y}) \bullet \lambda°\ \vec{x} + N1\ \vec{y} \bullet 0 + N2\ \vec{y} \bullet \vec{0} = m\,g\ \lambda° \sin\alpha$

$m\ \lambda°\ \lambda°° = m\,g\ \lambda° \sin\alpha \Rightarrow \lambda°° = g\ \sin\alpha$

Exercice 3 Une masse M = 120 kg en mouvement de translation rectiligne à 2 m/s est freiné par un dispositif composé d'un vérin de piston ∅ 100 mm et d'une chambre sous une pression de 6 bars



utilisons : Ec (S/R) finale - Ec(S/R) initiale = Σ W F intérieures + Σ W F extérieures

$$0 \quad - \tfrac{1}{2}\ m\ \ v^2 \quad = 0 \quad - p\ S\ \ \Delta x$$

ou d/dt Ec(S/R) = P(Fint) + P(ext→S/R)

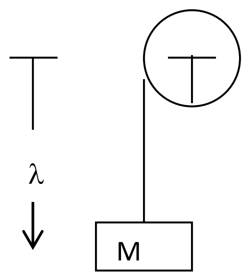
d/dt Ec(S/R) = P(ext→S/R)

$\tfrac{1}{2}\, m\, \lambda^{\circ 2} = -\, p\, S\, \mathbf{x} \bullet \lambda^{\circ}\, \mathbf{x} = -\, p\, S\, \lambda^{\circ}$

dérivons d/dt : $m\, \lambda^{\circ}\, \lambda^{\circ\circ} = -\, p\, S\, \lambda^{\circ}$

$m\ \ \lambda^{\circ\circ} = -\, p\, S$

On s 'aperçoit que la deuxième formulation est mieux adaptée à la recherche d'équation de mouvement.



Exercice 4 Une masse M est accrochée à l'aide d'un fil supposé sans masse, de rayon négligeable, à un tambour B, de rayon R et d'inertie J. Déterminer l'équation du mouvement des deux solides quand on laisse descendre sans vitesse initiale la masse M.

Plaçons y vertical ascendant et x horizontal à droite et $\lambda° = r\ \varphi°$, $\varphi°$ rotation du cylindre dans le sens direct.
On peut utiliser le fait que le système est conservatif, il n'y a pas de perte d'énergie durant le mouvement. Alors on peut écrire que Ec(S/R) + Ep(S/R) = constante.
$\lambda = \lambda o$ état initial

Ec(S/R) initial = 0

Ec(S/R) final = $\frac{1}{2}\, m\, \lambda^{o2} + \frac{1}{2}\, JG\, \varphi^{o2}$

Ep(S/R) initial = $-\ m\ \mathbf{g.OG} =\ m\ g\ \mathbf{y}.-\lambda o\ \mathbf{y} = -\ m\ g\ \lambda o$

Ep(S/R) final = $-\ m\ \mathbf{g.OG} = -\ m\ g\ \lambda$

$0 + (-\ m\ g\ \lambda o) = \frac{1}{2}\, m\, \lambda^{o2} + \frac{1}{2}\, JG\, \varphi^{o2} + (-\ m\ g\ \lambda)$

$m\ g\ (\lambda - \lambda o) = \frac{1}{2}\, m\, \lambda^{o2} + \frac{1}{2}\, JG\, \varphi^{o2} = \frac{1}{2}\,(m + JG/r^2)\, \lambda^{o2}$

dérivons d/dt $\quad m\ g\ \lambda° = (m + JG/r^2)\ \lambda°\lambda^{oo}$

$$m\ g = (m + JG/r^2)\ \lambda^{oo}$$