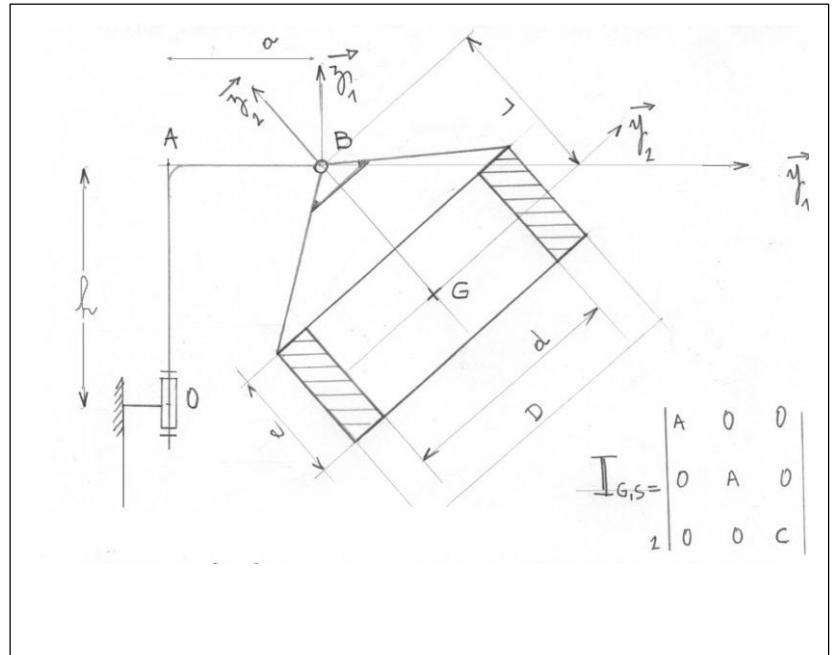


La manutention d'objets lourds est toujours délicate et peut déstabiliser la grue, le portique, ...

Dans ce cadre on cherche à mettre en équation les différents paramètres qui peuvent influencer sur la conception de l'embase, chariot moteur ou base de la grue, contrepoids ...

On modélise par :

- Un bâti 0 galiléen
- Un solide 1 en liaison pivot vertical Oz_1 . On néglige la masse.
- Le solide 2, cylindre parfait dans cette étude, de masse M .



Le solide oscille-t-il autour d'un axe fixe ?

Isoler le solide 2 et faire le bilan des actions mécaniques.

Quelle équation de projection doit-on écrire pour déterminer l'angle $\alpha(t)$? Comment appelle-t-on cette équation ?

Déterminer la projection sur Bx_2 du moment des actions extérieures au solide 2.

Déterminer la projection sur Bx_2 du moment dynamique du solide 2 dans son mouvement par rapport au repère galiléen 0.

En déduire l'équation de l'angle $\alpha(t)$ en fonction de la vitesse de rotation du solide 1 par rapport à 0.

Et si α petit et constant (stabilisé) ?

le solide oscille autour de $B, \vec{x}_2$, non fixe.

Equation de mouvement: $\sum \vec{M}_B \vec{F}_{ext \rightarrow 2} \cdot \vec{x}_2 = \delta_B (2/R_g) \cdot \vec{x}_2$

$$\sum \vec{M}_B \vec{F}_{ext \rightarrow 2} \cdot \vec{x}_2 = (\vec{BG} \wedge -M \cdot g \cdot \vec{z}_1) \cdot \vec{x}_2$$

$$= -M \cdot g \cdot L \cdot \sin \alpha$$

$$\vec{\sigma}_B (2/R_g) \cdot \vec{x}_2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \Pi_{G(2)} & \longrightarrow & \vec{\sigma}_G (2/R_g) & \longrightarrow & \vec{\sigma}_G (2/R_g) & \longrightarrow & \vec{\sigma}_B (2/R_g) \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \uparrow \\ \Pi_{B(2)} & \longrightarrow & \vec{\sigma}_B (2/R_g) & \longrightarrow & & & \end{array}$$

$$\vec{\sigma}_G (2/R_g) = \begin{vmatrix} A \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\psi} \sin \alpha \\ \dot{\psi} \cos \alpha \end{vmatrix} + \vec{0} \text{ (Centre de masse)} = \begin{vmatrix} A\dot{\alpha} \\ A\dot{\psi} \sin \alpha \\ 2C\dot{\psi} \cos \alpha \end{vmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_B (2/R_g) = \begin{vmatrix} A \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\psi} \sin \alpha \\ \dot{\psi} \cos \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 + M \\ -L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ -(a+L \sin \alpha) \dot{\psi} \\ L \dot{\alpha} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (A+ML^2) \dot{\alpha} \\ A\dot{\psi} \sin \alpha + ML(a+L \sin \alpha) \dot{\psi} \\ 2C\dot{\psi} \cos \alpha \end{vmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_{B(2/Rg)} = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{B(2/Rg)} \right]_2 + \vec{\omega}_{2/Rg} \wedge \vec{\sigma}_{B(2/Rg)} + M \cdot \vec{v}_{B/Rg} \wedge \vec{v}_{G/Rg}$$

$$\begin{vmatrix} (A+ML^2) \ddot{\alpha} \\ - \\ - \end{vmatrix}_2 + \begin{vmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\psi} \sin \alpha \wedge A \dot{\psi} \sin \alpha + ML(a+L \sin \alpha) \dot{\psi} \\ \dot{\psi} \cos \alpha \wedge C \dot{\psi} \cos \alpha \end{vmatrix}_2 + \begin{vmatrix} -a \dot{\psi} \\ 0 \wedge \\ 0 \end{vmatrix}_2 =$$

$$\vec{\sigma}_{B(2/Rg)} \cdot \vec{x}_2 = (A+ML^2) \ddot{\alpha} + C \dot{\psi}^2 \sin \alpha \cos \alpha - A \dot{\psi}^2 \sin \alpha \cos \alpha - ML(a+L \sin \alpha) \dot{\psi}^2 \cos \alpha$$

$$= (A+ML^2) \ddot{\alpha} + (C-A) \dot{\psi}^2 \sin \alpha \cos \alpha - ML \dot{\psi}^2 (a+L \sin \alpha) \cos \alpha$$

$\dot{\alpha} = 0$ (position stabilisée)

$$MgL \sin \alpha + (C-A) \dot{\psi}^2 \sin \alpha \cos \alpha - ML \dot{\psi}^2 (a+L \sin \alpha) \cos \alpha = 0.$$

si α petit :

$$MgL \alpha + (C-A) \dot{\psi}^2 \alpha - ML \dot{\psi}^2 (a+L \alpha) = 0$$

$$MgL \alpha + (C-A) \dot{\psi}^2 \alpha - ML \dot{\psi}^2 a - ML \dot{\psi}^2 \alpha = 0.$$

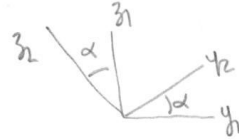
$$\alpha (MgL + (C-A) \dot{\psi}^2 - ML \dot{\psi}^2) = ML \dot{\psi}^2 a.$$

$$\alpha = \frac{ML \dot{\psi}^2 a}{MgL + (C-A-ML^2) \dot{\psi}^2}$$

α après les oscillations transitoires.

$$\text{Si } \ddot{\alpha} \neq 0 \quad (A+ML^2) \ddot{\alpha} + f(\alpha) = ML \dot{\psi}^2 a$$

Actions de liaison dans la liaison pivot ?



On isole 1+2

$$\left\{ \begin{array}{c} X_{O_{01}} \\ Y_{O_{01}} \\ Z_{O_{01}} \end{array} ; \begin{array}{c} L_{O_{01}} \\ M_{O_{01}} \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \tilde{F}_{0 \rightarrow 1} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -Mg \\ 0 \end{array} ; \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \tilde{F}_{\text{porteur} \rightarrow 2} \right\}$$

$$\Rightarrow \sum \left\{ \tilde{F}_{\text{ext} \rightarrow S1 \cup S2} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{O_{01}} \\ Y_{O_{01}} \\ Z_{O_{01}} - Mg \\ 0 \end{array} ; \begin{array}{c} L_{O_{01}} - (a + L \sin \alpha) Mg \\ M_{O_{01}} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \mathcal{Q}_{(1+2)/R_g} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} m_1 \vec{G}_1 + m_2 \vec{G}_2 \\ \vec{D} \end{array} ; \begin{array}{c} \vec{D}O(1/R_g) + \vec{D}O(2/R_g) \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\vec{G}_{2/R_g} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} -(a+L \sin \alpha) \ddot{\psi} - L \dot{\psi} \dot{\alpha} \cos \alpha + \dot{\alpha} \\ L \ddot{\alpha} \\ 0 \end{array} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} -(a+L \sin \alpha) \dot{\psi} \\ \dot{\psi} \sin \alpha \\ \dot{\psi} \cos \alpha \end{array} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} L \dot{\alpha} \\ 0 \end{array} \\ 2 \end{array}$$

$$\vec{G}_{2/R_g} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} -(a+L \sin \alpha) \ddot{\psi} - 2L \dot{\alpha} \dot{\psi} \cos \alpha \\ L \ddot{\alpha} - (a+L \sin \alpha) \dot{\psi}^2 \cos \alpha \\ + (a+L \sin \alpha) \dot{\psi}^2 \sin \alpha \end{array} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \vec{y}_2 &= \cos \alpha \vec{y}_1 + \sin \alpha \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 &= -\sin \alpha \vec{y}_1 + \cos \alpha \vec{z}_1 \end{aligned}$$

$$\vec{G}_{2/R_g} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} -(a+L \sin \alpha) \ddot{\psi} - 2L \dot{\alpha} \dot{\psi} \cos \alpha \\ L \ddot{\alpha} \cos \alpha - (a+L \sin \alpha) \dot{\psi}^2 \cos^2 \alpha - (a+L \sin \alpha) \dot{\psi}^2 \sin^2 \alpha \\ L \ddot{\alpha} \sin \alpha - (a+L \sin \alpha) \dot{\psi}^2 \cos \alpha \sin \alpha + (a+L \sin \alpha) \dot{\psi}^2 \sin \alpha \cos \alpha \end{array} \\ 1 \end{array}$$

cylindre-manège-grue 4

$$\vec{\sigma}_0(2/Rg) = ?$$

$$\vec{\sigma}_0(2/Rg) = \vec{\sigma}_G(2/Rg) + \vec{OG} \wedge M \cdot \vec{V}_{G/Rg} =$$

$$\begin{vmatrix} A\ddot{\alpha} \\ A\dot{\psi}\sin\alpha \\ C\dot{\psi}\cos\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -(a+L\sin\alpha) \\ h\sin\alpha \\ h\cos\alpha \end{vmatrix} \wedge M \begin{vmatrix} -(a+L\sin\alpha)\dot{\psi} \\ L\dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_0(2/Rg) = \begin{vmatrix} (A - MLh\cos\alpha)\ddot{\alpha} \\ (A\sin\alpha - M(a+L\sin\alpha)h\cos\alpha)\dot{\psi} \\ (C\cos\alpha + M(a+L\sin\alpha)h\sin\alpha)\dot{\psi} - M(a+L\sin\alpha)L\dot{\alpha} \end{vmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_0(2/Rg) = \begin{vmatrix} (A - MLh\cos\alpha)\ddot{\alpha} + MLh\dot{\alpha}^2\sin\alpha \\ (A\sin\alpha - M(a+L\sin\alpha)h\cos\alpha)\ddot{\psi} + A\dot{\psi}\dot{\alpha}\cos\alpha + Ma h\dot{\alpha}\dot{\psi}\sin\alpha \\ - MLh\dot{\alpha}\dot{\psi}\cos\alpha + MLh\dot{\alpha}\dot{\psi}\sin^2\alpha \\ \vdots \end{vmatrix}$$

...

$$\text{Si } \alpha = \text{cte et } \dot{\psi} = \text{cte}$$

$$\vec{\sigma}_0(2/Rg) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ (A\sin\alpha - M(a+L\sin\alpha)h\cos\alpha)\dot{\psi} \\ (C\cos\alpha + M(a+L\sin\alpha)h\sin\alpha)\dot{\psi} \end{vmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_0(2/Rg) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

non fini.

Cylindre manège. page 5