Mécanique du solide – Classes préparatoires

Dans le texte les vecteurs sont notés en caractères gras, sur les figures avec des flèches.

La compréhension du cours de **cinétique** et **dynamique** du solide est fondamentale pour construire un raisonnement à la fois sûr et efficace dans la résolution des problèmes de dynamique.

Le mot **cinétique**, du grec ancien *kinêtikos* (« qui se meut, qui met en mouvement »), fait référence au mouvement.

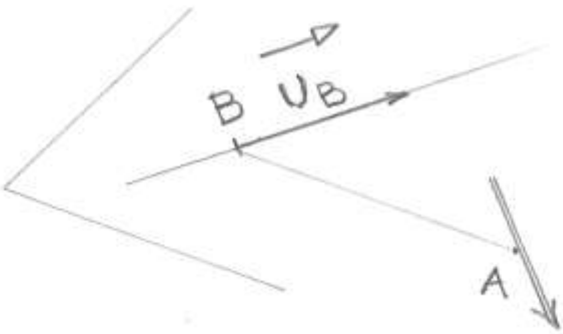
Nous parlerons ici de problèmes terrestres, dans lesquels la terre sera considéré comme un référentiel galiléen, pour des vitesses de points bien inférieures à la vitesse de la lumière.

Nous partirons de la notion de quantité de vitesse (de mouvement) d'une particule pour arriver au principe fondamental de la dynamique appliqué à un solide ou à un système de solides.

Avant de commencer, il semble utile de rappeler quelques définitions.

<u>Définition vectorielle du moment d'un vecteur glissant par rapport à un point</u>. (La flèche tordue sur le moment indique que le sens de ce vecteur dépend de l'opération produit vectoriel qui se fait dans le sens direct. On parle parfois de pseudo-vecteur. Cela n'a aucune incidence sur le cours que nous rédigerons).

Le vecteur moment est orthogonal aux vecteurs **AB** et $\mathbf{U_B}$.



$$\overset{\curvearrowright}{\mathcal{M}_A}(\vec{U_B}) = \vec{AB} \wedge \vec{U_B}$$

La quantité de mouvement d'une particule B, de masse m_B supposée concentrée, est égale à :

$$m_B\,\vec{V}_{B/Rg}$$

Le moment par rapport à un point A de cette quantité de mouvement est égal à :

$$\vec{AB} \wedge m_B\,\vec{V}_{B/Rg}$$

Centre de gravité d'un solide :

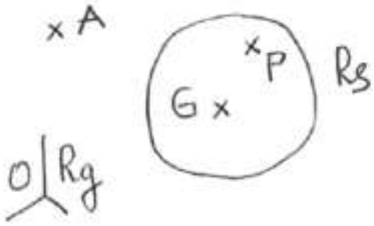
$$\int x\ dm = m\,xG\ ; \int y\ dm = m\,yG\ ; \int z\ dm = m\,zG$$

$$\int \dot{x}\ dm = m\,\dot{x}G\ ; \int \dot{y}\ dm = m\,\dot{y}G\ ; \int \dot{z}\ dm = m\,\dot{z}G$$

Dans le texte les vecteurs sont notés en caractères gras, sur les figures avec des flèches.

1-1

Torseur cinétique d'un solide dans son mouvement par rapport à un repère galiléen Rg



Définitions :

$$\underline{\text{Résultante cinétique}}\quad \overrightarrow{R_c}(S/R_g) = \int_{(S)} \overrightarrow{V}_{P/R_g}\, dm = m\,\overrightarrow{V}_{G/R_g}$$

$$\underline{\text{moment cinétique}}\quad \overrightarrow{\sigma_A}(S/R_g) = \int_{(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P/R_g)\, dm$$

On peut montrer (ci-dessous) que le champ de vecteurs moment cinétique en A des points d'un solide, est équiprojectif.

$$\overrightarrow{\sigma_A}(S/R_g) = \int \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}_{P/R_g}\, dm = \int (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) \wedge \overrightarrow{V}_{P/R_g}\, dm$$

$$= \int \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{V}_{P/R_g}\, dm + \int \overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{V}_{P/R_g}\, dm$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\sigma_A}(S/R_g) = \overrightarrow{\sigma_B}(S/R_g) + \overrightarrow{AB} \wedge m\,\overrightarrow{V}_{G/R_g}$$

Dans le texte les vecteurs sont notés en caractères gras, sur les figures avec des flèches.

1-2

Expression du moment cinétique en A d'un solide dans son mouvement par rapport à un repère galiléen Rg

$$\vec{\sigma}_A(S/R_g) = \int \vec{AP} \wedge \left[\vec{V}_{A\in S/R_g} + \vec{PA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R}\right] dm = \int \vec{AP} \wedge \left[\vec{V}_{A\in S/R_g} + \vec{\Omega}_{S/R_g} \wedge \vec{AP}\right] dm$$

$$= \int \vec{AP} \wedge \vec{V}_{A\in S/R_g}\, dm + \int \vec{AP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R_g} \wedge \vec{AP})\, dm .$$

$$= \int \vec{AP} . dm \wedge \vec{V}_{A\in S/R_g} + \int \vec{AP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP})\, dm .$$

$$\vec{\sigma}_A(S/R_g) = \int \vec{AP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP})\, dm + m . \vec{AG} \wedge \vec{V}_{A\in S/R_g}$$

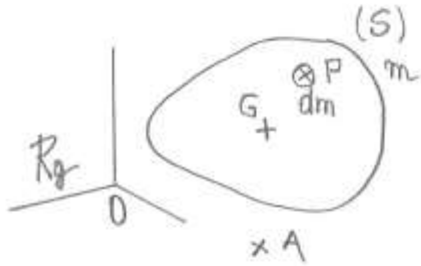
Cas de nullité du deuxième terme :

Le point choisi est G (A = G)

Le point choisi (A) est fixe

Comment écrire le premier terme du moment cinétique ?

$$\vec{AP} \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right._{b_g} \qquad \vec{\Omega}_{S/R_g} \left| \begin{matrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{matrix} \right._{b_g}$$



$$\int \vec{AP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R_g} \wedge \vec{AP})\, dm = \begin{vmatrix} \int (y^2+z^2)\, dm & -\int xy\, dm & -\int xz\, dm \\ -\int xy\, dm & \int (x^2+z^2)\, dm & -\int yz\, dm \\ -\int xz\, dm & -\int yz\, dm & \int (x^2+y^2)\, dm \end{vmatrix}_{A,\, b_g} \left| \begin{matrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{matrix} \right._{b_g}$$

Dans le texte les vecteurs sont notés en caractères gras, sur les figures avec des flèches.

Conclusion :

$$\left\{ \mathcal{C}_{S/R_g} \right\} = \left\{ \overrightarrow{R_C}(S/R_g) \; ; \; \overrightarrow{\sigma_A}(S/R_g) \right\}$$

$$\left\{ \mathcal{C}_{S/R_g} \right\} = \left\{ m \cdot \overrightarrow{V_{G/R_g}} \; ; \; \mathbb{I}_A(S)\, \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} + m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A \in S/R_g}} \right\}$$

1 – 3

Dérivée galiléenne du torseur cinétique en A du S dans son mouvement par rapport à Rg :

Dérivée galiléenne de la résultante cinétique

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{R_C}(S/R_g)\right]_{R_g} = \left[\frac{d}{dt}\, m\, \overrightarrow{V_{G/R_g}}\right] = m \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G/R_g}} = \overrightarrow{R_D}(S/R_g)$$

Dérivée galiléenne du moment cinétique en A du solide S dans son mouvement par rapport à Rg

$$\overrightarrow{\sigma_A}(S/R_g) = \int \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P/R_g}}\, dm$$

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_A}(S/R_g)\right]_{R_g} = \int \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P/R_g}}\, dm + \int \left[\frac{d(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP})}{dt}\right]_{R_g} \wedge \overrightarrow{V_{P/R_g}}\, dm$$

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_A}(S/R_g)\right]_{R_g} = \overrightarrow{\delta_A}(S/R_g) + \left(-\overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge \int \overrightarrow{V_{P/R_g}}\, dm\right)$$

$$\overrightarrow{\delta_A}(S/R_g) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_A}(S/R_g)\right]_{R_g} + m\, \overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge \overrightarrow{V_{G/R_g}}$$

Dans le texte les vecteurs sont notés en caractères gras, sur les figures avec des flèches.

Si A est fixe, si A est confondu avec G, si les vitesses de A (géométrique) et G sont colinéaires

$$\overrightarrow{\delta_G}(S/R_g) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_G}(S/R_g)\right]_{R_g}$$

1 – 4 Torseur dynamique en A du solide S dans son mouvement par rapport à Rg :

On peut démontrer que le champ des vecteurs accélération des points P d'un solide est équiprojectif

$$\overrightarrow{\delta_A}(S/R_g) = \int \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}_{P/R_g} \cdot dm = \int (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) \wedge \overrightarrow{\Gamma}_{P/R_g} \cdot dm$$

$$= \int \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Gamma}_{P/R_g} \cdot dm + \int \overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}_{P/R_g} \cdot dm$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\delta_A}(S/R_g) = \overrightarrow{\delta_B}(S/R_g) + \overrightarrow{AB} \wedge m\,\overrightarrow{\Gamma}_{G/R_g}$$

On peut alors écrire le torseur dynamique en A du solide S dans son mouvement par rapport à Rg

$$\left\{\mathcal{D}_{S/R_g}\right\} = \left\{\overrightarrow{R_D}(S/R_g)\ ;\ \overrightarrow{\delta_A}(S/R_g)\right\}$$

$$\left\{\mathcal{D}_{S/R_g}\right\} = \left\{m\,\overrightarrow{\Gamma}_{G/R_g}\ ;\ \frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_A}(S/R_g) + m\,\overrightarrow{V}_{A/R_g} \wedge \overrightarrow{V}_{G/R_g}\right\}$$