Chapitre 2 :

Dynamique du solide dans le cas des problèmes plans

Module I2-3-SI2

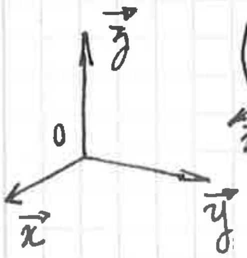
COURS

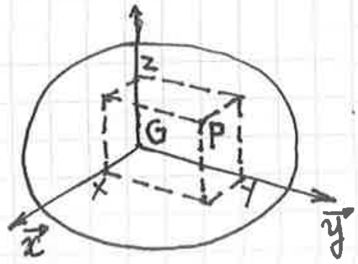
1. Masse et centre de masse
2. Les deux théorèmes de GULDIN
3. Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe
4. Moment d'inertie d'un solide entre deux axes parallèles – théorème de HUYGHENS
5. Ecriture du moment cinétique d'un solide en mouvement par rapport à un repère galiléen.
6. Dérivée galiléenne du moment cinétique.

Voir aussi http://perso.wanadoo.fr/papanicola/sciences_indus/index.html

Masse et centre de masse :

→ Etudions le solide S situé dans un référentiel $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$





G est le centre de masse de S

$\vec{GP} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$

dm élément de masse autour de P

Si G est centre de masse : $\int X\,dm = 0 \quad \int Y\,dm = 0 \quad \int Z\,dm = 0$

→ Recherchons x_g, y_g, z_g quand $\vec{OG} = x_g\vec{x} + y_g\vec{y} + z_g\vec{z}$

$\vec{OP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$

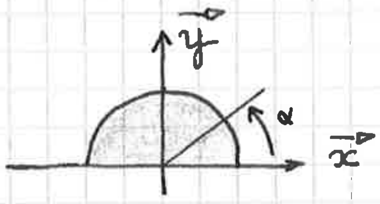
$x = x_g + X \quad , \quad y = y_g + Y \quad z = z_g + Z$

$\int (x - x_g)\,dm = 0 \quad \int (y - y_g)\,dm = 0 \quad \int (z - z_g)\,dm = 0$

→ On en déduit $\int x\,dm = M x_g \; ; \int y\,dm = M y_g \; ; \int z\,dm = M z_g$

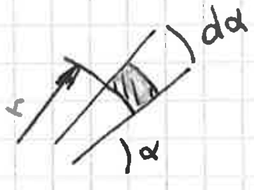
$$\Rightarrow \quad x_g = \frac{\int x\,dm}{M} \; ; \quad y_g = \frac{\int y\,dm}{M} \; ; \quad z_g = \frac{\int z\,dm}{M}$$

→ exemple : centre de gravité d'un demi-cylindre :



$x_g = 0 \; ; \quad z_g = \frac{\ell}{2} \; ; \quad y_g = \frac{\int y\,dm}{M}$

$dm = \rho \,.\, dz \,.\, dr \,.\, r \,.\, d\alpha$



$$M\, y_g = \int_{(v)} r \sin\alpha \;\; \rho\, dz\, dr\, r\, d\alpha$$

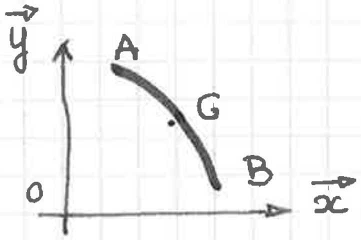
$$M\, y_g = \rho \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\ell/2} dz \int_0^{\pi} \sin\alpha\, d\alpha \int_0^{R} r^2\, dr$$

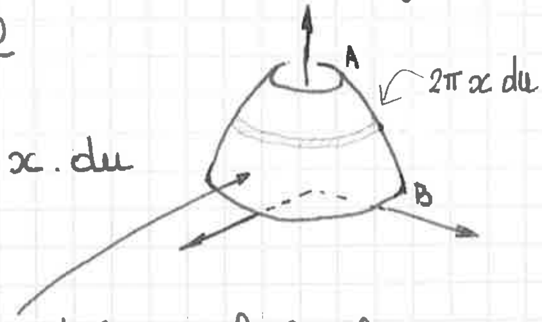
$$M\, y_g = \rho\,\ell \left[-\cos\alpha\right]_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{R} = \rho\,\ell\,\frac{R^3}{3} \quad \text{et} \quad M = \rho\,\ell\,\frac{\pi R^2}{2}$$

Centre de gravité du $\frac{1}{2}$ cylindre : $y_g = \frac{4R}{3\pi}$

les deux théorèmes de GULDIN

→ Premier théorème : soit un fil pesant AB, de centre de gravité G, de masse par unité de longueur μ, de masse m, de longueur ℓ $\quad m = \mu . \ell$



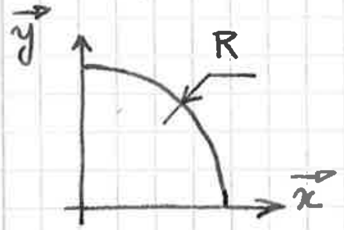


$$x_g = \frac{\int \mu . x . du}{m} \Rightarrow \cancel{\mu} . \ell . x_g = \cancel{\mu} \int x . du$$

multiplions l'égalité par 2π

$2\pi . \ell . x_g = \int 2\pi . x . du$ surface engendrée par le fil lors de sa rotation autour de $O\vec{y}$.

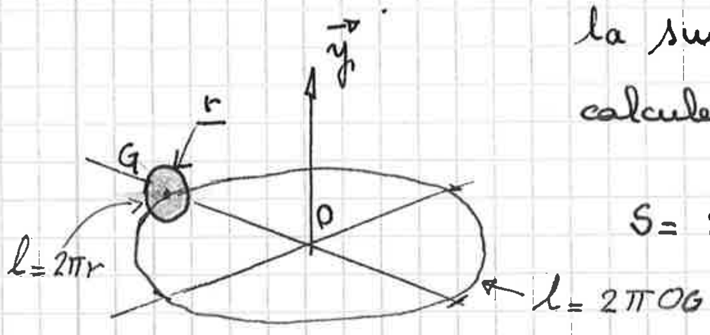
→ exemple :



la surface de la sphère : $4\pi R^2$ (creuse)

$$2\pi \, x_g . \frac{\pi R}{2} = 2\pi R^2 \qquad x_g = \frac{2R}{\pi}$$

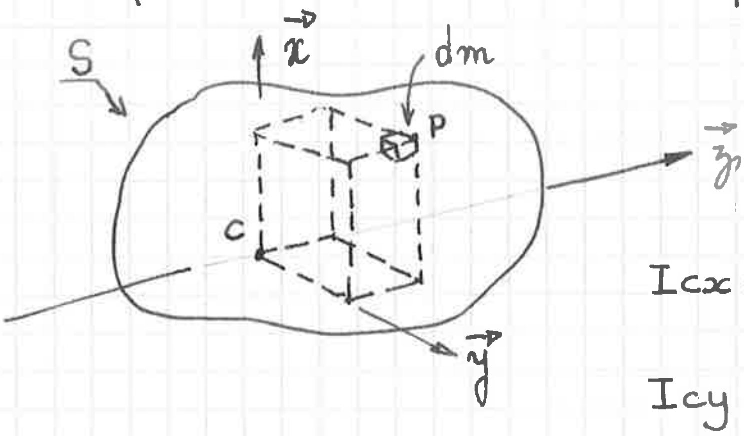
→ autre exemple :



la surface d'un tore peut se calculer à l'aide de ce théorème :

$$S = 2\pi . OG . 2\pi r = 4\pi^2 r \, OG$$

2.3. Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe



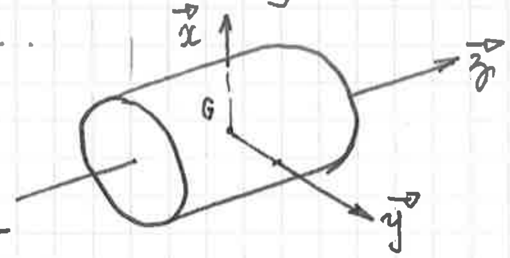
Ils se notent I_{Cx}, I_{Cy}, I_{Cz}.

$$I_{Cx} = \int (y^2 + z^2)\, dm$$

$$I_{Cy} = \int (x^2 + z^2)\, dm$$

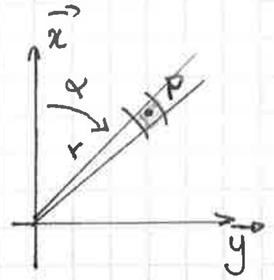
$$I_{Cz} = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

→ exemple : le cylindre.



I_{Gx}, I_{Gy}, I_{Gz} ?

Le cylindre est de rayon R, de longueur L



$$I_{Gz} = \int (x^2 + y^2)\, dm = \int_{(V)} r^2 \rho \, dz \, r\,dr\, d\alpha$$

$$= \rho . L . 2\pi \frac{R^4}{4} \quad \text{et} \quad M = \rho L \pi R^2 \Rightarrow I_{Gz} = \frac{MR^2}{2}.$$

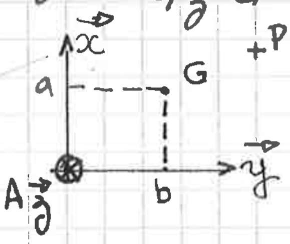
En remarquant que $I_{Gx} = I_{Gy}$

$$I_{Gx} + I_{Gy} = \frac{MR^2}{2} + \frac{M\ell^2}{6}$$ ← attention aux bornes en intégrant $2\int z^2 dm$!

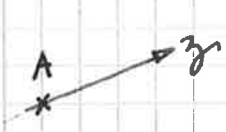
$$I_{Gx} = I_{Gy} = \frac{MR^2}{4} + \frac{ML^2}{12} \quad \text{et} \quad I_{Gz} = \frac{MR^2}{2}.$$

2.4. Théorème de HUYGHENS

$G\vec{z}$ et $A\vec{z}$ sont deux axes //.



$\vec{GP} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$



$$I_{Az} = \int (x^2 + y^2)\, dm = \int [(X+a)^2 + (Y+b)^2]\, dm = I_{Gz} + M(a^2 + b^2) + \underbrace{2\int X\,dm + 2\int Y\,dm}$$

ces 2 termes sont nuls car G : CDG *

$$\rightarrow I_{Az} = I_{Gz} + M . d(A_z, G_z)^2$$

Rq: $I_{Az} \neq I_{Bz} + M\, d(A_z, B_z)$ *

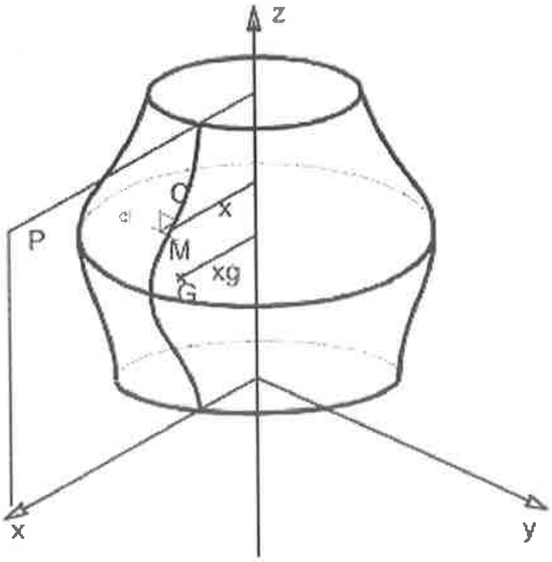
b) Théorèmes de Guldin

(1) Centre d'inertie d'une courbe plane

L'aire de la surface engendrée par une courbe plane tournant autour d'un axe de son plan et ne la traversant pas est égal au produit de la longueur de la courbe par le périmètre décrit par son centre d'inertie.

La courbe (C), est contenue dans le plan $(O,\vec{x},\vec{z})$ et ne traverse pas $(O,\vec{z})$.

On associe à la courbe (C) une masse linéique fictive:



$$m_C\ \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OM}\ dm$$

$$m_C\ \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OM}\cdot\lambda\cdot dl$$

$$m_C = \lambda\cdot L$$

$$L\ \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OM}\cdot dl$$

en ramenant sur l'axe x,

$$L\cdot x_G = \int_C x\cdot dl$$

de plus la surface engendrée par la rotation de la courbe (C) s'écrit:

$$S = \int_S x\cdot d\theta\cdot dl = \int_0^{2\pi} d\theta\cdot\int_C x\cdot dl = 2\pi\int_C x\cdot dl$$

on a donc:

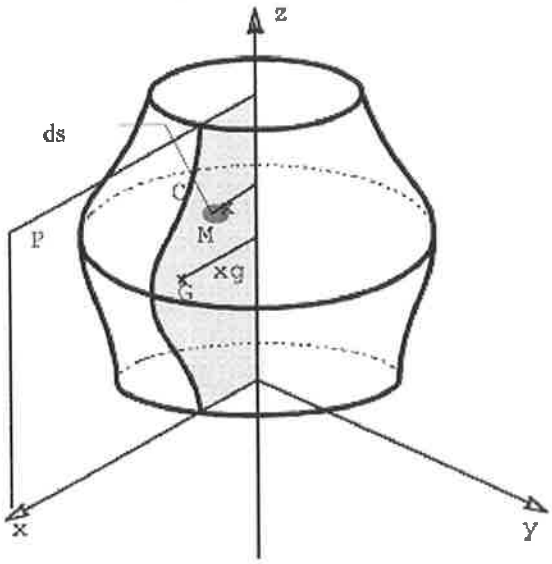
$$S = 2\pi\cdot x_G\cdot L$$

(2) Centre d'inertie d'une surface plane

Le volume engendré par une surface plane tournant autour d'un axe de son plan et ne la traversant pas est égal au produit de l'aire de la surface par la longueur du périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie.

La surface (S) est contenu dans le plan $(O,\vec{x},\vec{z})$ et ne traverse pas $(O,\vec{z})$.

On associe à (S) une masse surfacique.



$$m_S\ \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OM}\ dm$$

$$m_S\ \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OM}\cdot\sigma\cdot dl$$

$$m_S = \sigma\cdot S$$

$$S\ \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OM}\cdot ds$$

de plus le volume engendré par la surface S s'écrit:

$$V = \int_V x\cdot d\theta\cdot ds = \int_0^{2\pi} d\theta\cdot\int_S x\cdot ds = 2\pi\int_S x\cdot ds$$

d'où:

$$V = 2\pi\cdot x_G\cdot S$$

Remarque:

L'utilisation des théorèmes de Guldin permet de simplifier le calcul de position du centre d'inertie dans la mesure où l'on connaît les caractéristiques du volume ou de la surface balayée.

voir/ tiré de / **http://perso.wanadoo.fr/papanicola/sciences_indus/index.html**

Les deux théorèmes de GULDIN:

Théorème 1 : la surface engendrée par une ligne, de longueur l, de centre de gravité G, qui tourne autour d'un axe, est égale au produit de la longueur l de la ligne par le périmètre décrit par le centre de gravité de cette ligne : $S = 2 \times \pi \times$ (R_G *distance de G à l'axe*) $\times l$

Théorème 2 : le volume engendrée par une surface S, de centre de surface G, qui tourne autour d'un axe, est égale au produit de la surface S par le périmètre décrit par le centre de surface : $V = 2 \times \pi \times$ (R_G *distance de G à l'axe*) $\times S$