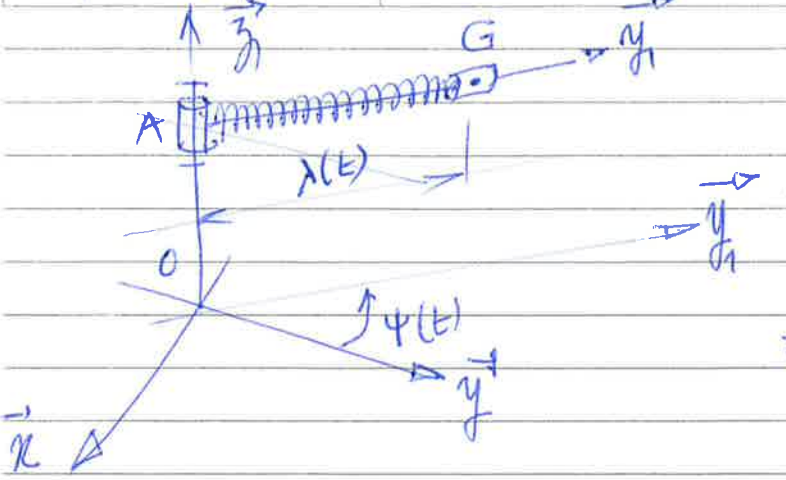
1) Centrifugeuse



Rg repère galiléen

$O,\vec{z}$ axe fixe de Rg

$R_g(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

1) Paramètre $\vec{AG} = \lambda(t)\vec{y_1}$ $\quad \vec{y}, \vec{y_1} = \psi(t)$

2) Vecteur position$/R_g$ $\vec{OG}$ ou $\vec{AG}$ car A est un point fixe $/R_g$

3) $$\vec{V}_{G/R_g} = \left[\frac{d\vec{AG}}{dt}\right]_{R_g} = \left[\frac{d\lambda\vec{y_1}}{dt}\right]_{R_g} = \dot{\lambda}\vec{y_1} + \lambda(\underbrace{\dot{\psi}\vec{z_1}}_{\Omega b_1/R_g} \wedge \vec{y_1})$$

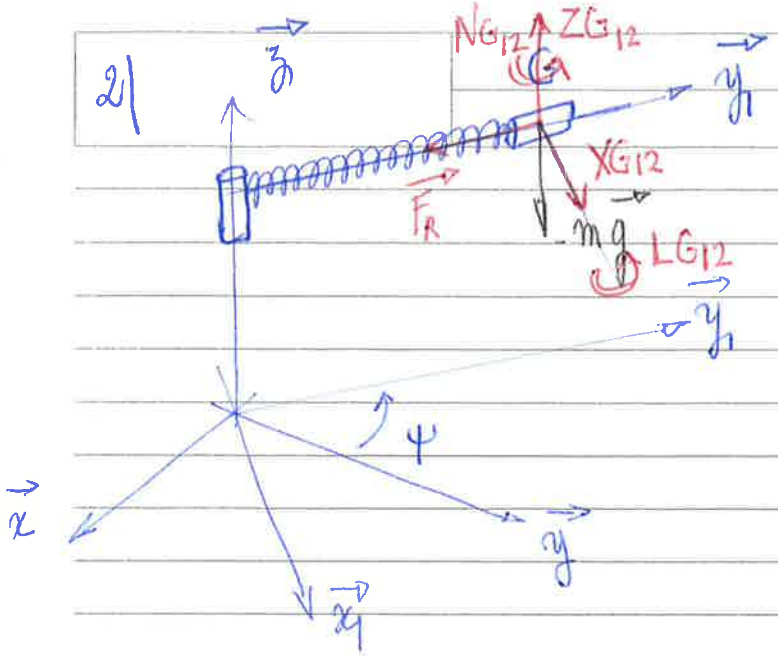
$$\vec{V}_{G/R_g} = \dot{\lambda}\vec{y_1} - \lambda\dot{\psi}\vec{x_1}$$

4) $$\vec{\Gamma}_{G/R_g} = \left[\frac{d\vec{V}_{G/R_g}}{dt}\right]_{R_g} = \ddot{\lambda}\vec{y_1} + \dot{\lambda}(\dot{\psi}\vec{z_1}\wedge\vec{y_1}) - \dot{\lambda}\dot{\psi}\vec{x_1} - \lambda\ddot{\psi}\vec{x_1} - \lambda\dot{\psi}(\dot{\psi}\vec{z_1}\wedge\vec{x_1})$$

$$\vec{\Gamma}_{G/R_g} = \ddot{\lambda}\vec{y_1} - 2\dot{\lambda}\dot{\psi}\vec{x_1} - \lambda\ddot{\psi}\vec{x_1} - \lambda\dot{\psi}^2\vec{y_1}$$

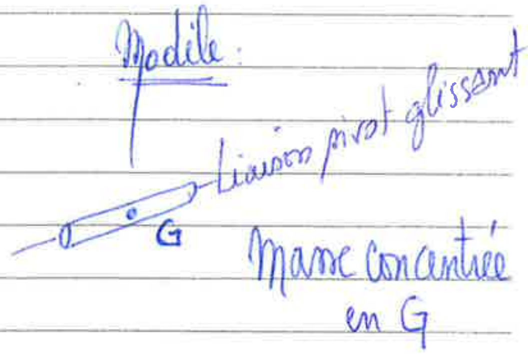
acc relative $\qquad$ acc de coriolis $\qquad$ acc. centripète

2)



$$\{\mathcal{L}_{12}\}_G^{b_1} = \begin{Bmatrix} XG_{12} & LG_{12} \\ 0 & 0 \\ ZG_{12} & NG_{12} \end{Bmatrix}_G^{b_1}$$

Modèle :



5) On isole la masse M, supposée concentrée en G

Bilan : Poids $\{-mg\vec{z} \, ; \, \vec{0}\}_G$

Pivot glissant $\{XG_{12}\vec{x_1} + ZG_{12}\vec{z} \, ; \, LG_{12}\vec{x_1} + NG_{12}\vec{z}\}$

Ressort. $\{\vec{F_R} \, ; \, \vec{0}\}_G$.

avec $\vec{F_R} = -(\lambda - \lambda_0) K \vec{y_1}$

Si $\lambda > \lambda_0$, alors le ressort est tendu,

alors la force est selon $-\vec{y_1}$, $\lambda - \lambda_0 > 0$, $\vec{F_R} = -(\lambda - \lambda_0) K \vec{y_1}$

Principe fondamental de la dynamique du point.

$$\sum \vec{F}_{\to G} = m \, \vec{\Gamma}_{G/R_g}.$$

$$-(\lambda-\lambda_0)K\vec{y_1} + XG_{12}\vec{x_1} + ZG_{12}\vec{z_1} - mg\vec{z_1}$$
$$= m\ddot{\lambda}\vec{y_1} - m\lambda\dot{\psi}^2\vec{y_1} - 2m\dot{\lambda}\dot{\psi}\vec{x_1} - \lambda m\ddot{\psi}\vec{x_1}$$

Plus simple:

$$\begin{cases} XG_{12}\vec{x_1} = -m\lambda\ddot{\psi}\vec{x_1} - 2m\dot{\lambda}\dot{\psi}\vec{x_1} \\ -(\lambda-\lambda_0)K\vec{y_1} = m\ddot{\lambda}\vec{y_1} - m\lambda\dot{\psi}^2\vec{y_1} \\ ZG_{12}\vec{z_1} - mg\vec{z_1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} XG_{12} = -m\lambda\ddot{\psi} - 2m\dot{\lambda}\dot{\psi} & (1) \\ m\ddot{\lambda} + (K - m\dot{\psi}^2)\lambda = K\lambda_0 & (2) \\ ZG_{12} = mg & (3) \end{cases}$$

(1) Théorème de la résultante projeté sur $\vec{x_1}$

(2) 〃 $\vec{y_1}$.

Cette projection comporte des termes de mouvement et ne comporte pas d'inconnues de liaison.

– Équation de mouvement –

Équation différentielle à 2 variables.

3bis)	$\dot{\varphi}$! $K > m\dot{\psi}^2$	

L'équation de mouvement est :

$$\ddot{\lambda} + \frac{K - m\dot{\psi}^2}{m}\lambda = \frac{K\lambda_0}{m}$$

$$a = \frac{K - m\dot{\psi}^2}{m}$$

$$b = \frac{K\lambda_0}{m}$$

wolframalpha.com/input/

$$\lambda(t) = \frac{b}{a} + C_2 \sin\sqrt{a}\,t + C_1 \cos\sqrt{a}\,t$$

$$\lambda(t) = \frac{K\lambda_0 \cancel{m}}{\cancel{m}(K - m\dot{\psi}^2)} + C_1 \cos\sqrt{\frac{K - m\dot{\psi}^2}{m}}\,t + C_2 \sin\sqrt{\frac{K - m\dot{\psi}^2}{m}}\,t$$

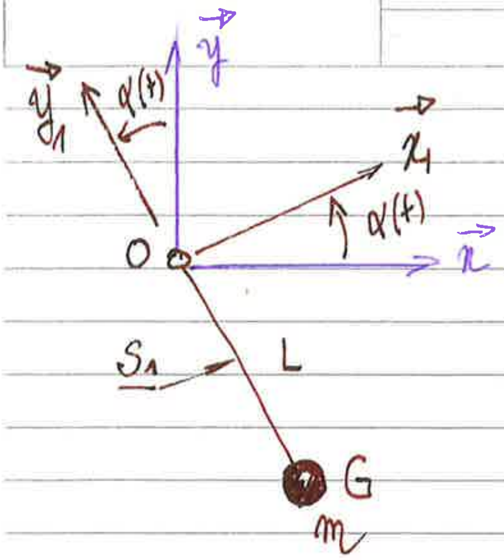
$t = 0$ $$\lambda(0) = \lambda_0 = \frac{K\lambda_0}{K - m\dot{\psi}^2} + C_1$$

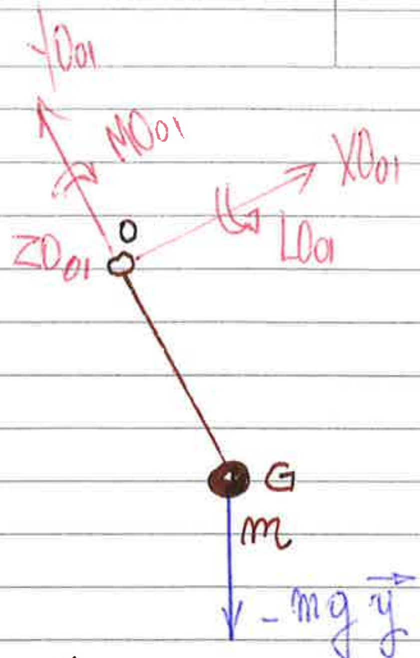
$$\lambda(t) = \frac{b}{a} + C \sin(\sqrt{a}\,t + \varphi)$$

$$K < m\dot{\psi}^2$$

$$\lambda = -\frac{b}{a} + C_1 e^{\sqrt{a}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{a}\,t}$$

Voir aussi Wolframalpha.com





O point fixe du repère galiléen.

1) Paramétrage : $\vec{OG} = -L\vec{y_1}$, $\widehat{\vec{y}O\vec{y_1}} = \alpha(t)$.

2) $\vec{V}_{G/R_g} = -L(\dot{\alpha}\vec{z} \wedge \vec{y_1}) = +L\dot{\alpha}\vec{x_1}$

3) $\vec{\Gamma}_{G/R_g} = L\ddot{\alpha}\vec{x_1} + L\dot{\alpha}(\dot{\alpha}\vec{z} \wedge \vec{x_1})$.

$\vec{\Gamma}_{G/R_g} = L\ddot{\alpha}\vec{x_1} + L\dot{\alpha}^2\vec{y_1}$.

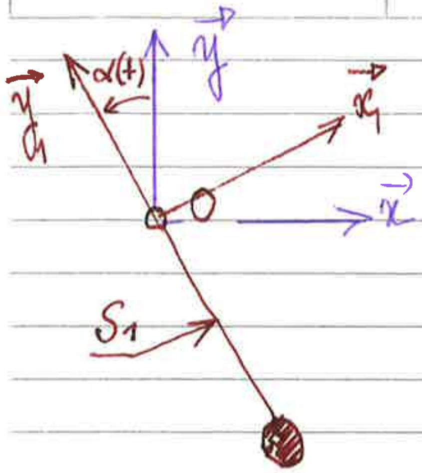
4) Bilan des actions sur S_1 :

Poids : $\left\{-mg\vec{y} \ ; \ \vec{0}\right\}_G = \left\{-mg\sin\alpha\,\vec{x_1} - mg\cos\alpha\,\vec{y_1} \ ; \ \vec{0}\right\}_G$

Pivot $0 \to 1$ $\left\{XO_{01}\vec{x_1} + YO_{01}\vec{y_1} + ZO_{01}\vec{z_1} \ ; \ LO_{01}\vec{x_1} + MO_{01}\vec{y_1}\right\}_O$

$$\left\{\begin{matrix} XO_{01} & LO_{01} \\ YO_{01} \ ; & MO_{01} \\ ZO_{01} & 0 \end{matrix}\right\}_{O}^{b_1}$$

$$\vec{y} = \cos\alpha\,\vec{y_1} + \sin\alpha\,\vec{x_1}$$



$$\vec{\Gamma}_{G/R_g} = L\ddot{\alpha}\,\vec{x}_1 + L\dot{\alpha}^2\,\vec{y}_1$$

Appliquons $\vec{F} = m.\vec{\Gamma}_{G/R_g} = \sum \vec{F}ext \rightarrow S_1$

$/\vec{x}_1$: $-mg\sin\alpha + XO_{01} = mL\ddot{\alpha}$

$/\vec{y}_{01}$: $-mg\cos\alpha + YO_{01} = mL\dot{\alpha}^2$

$/\vec{z}_{01}$: $ZO_{01} = 0$

les équations trouvées ne permettent pas de trouver l'équation de mouvement.

Ecrivons le théorème des moments dynamiques en O

$$\vec{OG} \wedge m\,\vec{\Gamma}_{G/R_g} = \sum \vec{Mt}_{/O}\,\vec{F}ext \rightarrow S_1.$$

$\vec{OG} \wedge m\,\vec{\Gamma}_{G/R_g} = -L\vec{y}_{01} \wedge (L\ddot{\alpha}\,\vec{x}_1 + L\dot{\alpha}^2\,\vec{y}_1)\,m.$

$\vec{OG} \wedge m\,\vec{\Gamma}_{G/R_g} = +mL^2\ddot{\alpha}\,\vec{z}_1$ (moment dynamique)

Poids : $\left\{-mg\vec{y} \,;\, \vec{OG} \wedge -mg\vec{y}\right\}_G = \left\{-mg\vec{y} \,;\, -L\vec{y}_1 \wedge -mg\vec{y}\right\}_O$

$= \left\{-mg\vec{y} \,;\, -Lmg\sin\alpha\,\vec{z}\right\}_O$

$/\vec{x_1}$: $L_{01} = 0$

$/\vec{y_1}$: $M_{01} = 0$

$/\vec{z_1}$: $-Lmg\sin\alpha = mL^2\ddot{\alpha}$.

L'équation de mouvement provient ici de la projection sur $\vec{z}$ (axe de rotation) du Théorème du moment dynamique en O, point fixe.

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{L}\sin\alpha = 0.$$

Equation différentielle

Cas des petites oscillations : $\ddot{\alpha} + \frac{g}{L}\alpha = 0$.

Solution de l'équation différentielle $\ddot{\alpha} + \frac{g}{L}\alpha = 0$.

$$\alpha = c^{te} \sin(\omega t + \varphi) \qquad \omega^2 = \frac{g}{L}$$

$t = 0$, $\alpha = \alpha_0$ $\quad \alpha_0 = c^{te} \sin\varphi$

Si α non petit ... ! $t=0$, $\dot{\alpha} = 0$

$$\dot{\alpha} = c^{te}.\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$t = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \text{ si } \dot{\alpha} = 0. \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = c^{te} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \alpha_0 . \cos\omega t$$