## Chapitre 1 : dynamique du point ou du solide modélisable par une masse ponctuelle.

**Pré requis**

**1 – Notions de centre de masse et de centre de gravité.**

Les systèmes matériels réels ne sont pas, en général, assimilables à un point matériel car leur masse occupe toujours un certain volume dont la forme géométrique peut être très variée.
Si le solide matériel garde une forme géométrique invariable quelques que soient les forces auxquelles il est soumis, nous dirons qu'il s'agit d'un **solide indéformable**.
Dans la suite, nous nous limiterons à l'étude de solides homogènes considérés indéformable.
Si le solide est soumis à un champ de forces (l'exemple le plus courant est la gravité), chaque élément de volume est soumis à la force qui s'exerce au point où il est situé : le force globale qui s'exerce sur le solide est la résultante de toutes les forces sur tous les élément de volume qui le composent.
Si le champ de force soumis au solide est uniforme, le point d'application de la résultante s'appelle **centre de masse** du solide.
Dans le cas de la gravité, ce point s'appelle aussi **centre de gravité** du solide.

**2 – Moment d'un vecteur par rapport à un point.**

Dans la suite du cours nous aurons besoin de la notion de moment d'un vecteur glissant (force) ou de vecteur lié (vecteur vitesse, vecteur accélération, quantité de vitesse, quantité d'accélération).

Définition :

D'une façon générale, le moment d'un vecteur glissant **V**, de support (A, Δ), par rapport à un point quelconque O, est égal au produit vectoriel du vecteur **OA** par le vecteur **V** :

$$\mathbf{Mt_O(V) = OA \wedge V}$$

D'une façon générale, le moment d'un vecteur lié **V**, d'origine A, par rapport à un point quelconque O, est égal au produit vectoriel du vecteur **OA** par le vecteur **V** :

$$\mathbf{Mt_O(V) = OA \wedge V}$$

**3 – Les lois de Newton (1643 - 1727)**


Dans un repère galiléen :

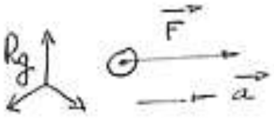
Première loi de Newton : un système matériel au repos qui reste au repos ou un système matériel animé d'une vitesse constante n'est soumis à aucune force.

Deuxième loi de Newton : à tout instant, la dérivée par rapport au temps du produit de la masse du corps en mouvement par sa vitesse est égale à la résultante des forces auxquelles il est soumis : d/dt (m **V**) = **F**

# Dynamique des solides modélisables par des masses ponctuelles.

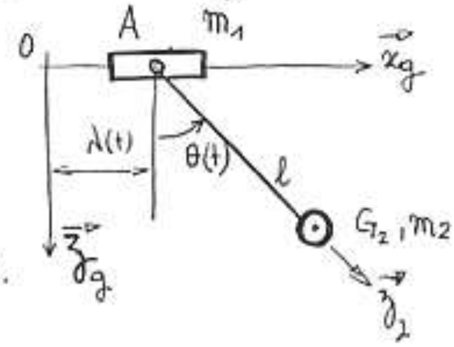
## Deuxième loi de Newton :

A tout instant, la dérivée par rapport au temps du produit de la masse du corps en mouvement par sa vitesse est égale à la résultante des forces auxquelles il est soumis.




$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

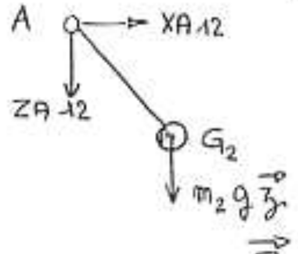
**Exemple :** le pont roulant.
On le modélise par deux solides dont les masses sont concentrées en $G_1$ et $G_2$.
le système a 2 mobilités : $\lambda$ et $\theta$.
le système est supposé plan.




On va appliquer à cet exemple le principe fondamental de la dynamique.

$$\{\mathcal{F}_{ext \rightarrow \Sigma}\} = \{\mathcal{D}_{\Sigma / R_g}\}$$

→ Isolons $S_2$ et appliquons le PFD :




$$\begin{cases} XA_{12}\,\vec{x}_g + ZA_{12}\,\vec{z}_g + m_2 g\,\vec{z}_g = m_2\,\vec{\Gamma}_{G_2/R_g} \\ \vec{AG_2} \wedge m_2 g\,\vec{z}_g = \vec{AG_2} \wedge m_2\,\vec{\Gamma}_{G_2/R_g} \end{cases}$$

$m_2 \cdot \vec{\Gamma}_{G_2/R_g}$ s'appelle quantité d'accélération de $S_2$.

$\vec{AG_2} \wedge m_2 \vec{\Gamma}_{G_2/R_g}$ s'appelle moment dynamique de $S_2$, en A, et se note $\vec{\delta}_A(S_2/R_g)$

Recherchons le système d'équations

$\overrightarrow{\Gamma_{G2/Rg}}$ ? $= \ddot{\lambda}\,\overrightarrow{x_g} + l\ddot{\theta}\,\overrightarrow{x_2} - l\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{z_2}$

D'où le système d'équations :

$$\begin{cases} XA_{12} = m_2(\ddot{\lambda} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\,\dot{\theta}^2\sin\theta) \\ ZA_{12} + m_2 g = -m_2\,(l\ddot{\theta}\sin\theta - l\dot{\theta}^2\cos\theta) \\ \ddot{\lambda}\cos\theta + l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Rq : la troisième équation ne comporte pas d'inconnue sthénique. On l'appelle EQUATION DE MOUVEMENT. Cette dernière comporte deux inconnues.

Rq : Le torseur dynamique s'écrit par ses éléments de réduction en A : $\left\{\mathcal{D}\,S_2/R_g\right\}_A = \left\{m_2\,\overrightarrow{\Gamma_{G2/Rg}}\ ;\ \overrightarrow{AG_2}\wedge m_2\,\overrightarrow{\Gamma_{G2/Rg}}\right\}_A$

On peut démontrer que :

$$\left\{\mathcal{D}\,S_2/R_g\right\}_A = \left\{\overrightarrow{R_D}\ ;\ \overrightarrow{\delta_A(S_2/R_g)}\right\}_A = \left\{\overrightarrow{R_D}\ ;\ \overrightarrow{\delta_B(S_2/R_g)} = \overrightarrow{\delta_A(S_2/R_g)} + \overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{R_D}\right\}_B$$

Rq : Pour calculer le moment dynamique, on aurait pu dériver le moment cinétique ou moment de la quantité de vitesse. $\overrightarrow{\sigma_A}(S_2/R_g) = \overrightarrow{AG_2}\wedge m_2\,\overrightarrow{V_{G2/Rg}}$.

Le torseur cinétique s'écrit :

$$\left\{\mathcal{C}\ S_2/R_g\right\}_A = \left\{\overrightarrow{R_C} = m_2\,\overrightarrow{V_{G2/Rg}}\ ;\ \overrightarrow{\sigma_A}(S_2/R_g) = \overrightarrow{AG_2}\wedge m_2\,\overrightarrow{V_{G2/Rg}}\right\}_A$$

En effet :

$$\left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{\sigma_A}(S_2/R_g)\right]_{R_g} = \left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{AG_2}\wedge m_2\,\overrightarrow{V_{G2/Rg}}\right]_{R_g} = \left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{AG_2}\right]_{R_g}\wedge m_2\,\overrightarrow{V_{G2/Rg}} + \overrightarrow{AG_2}\wedge\left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{V_{G2/Rg}}\right]_{R_g} m_2$$

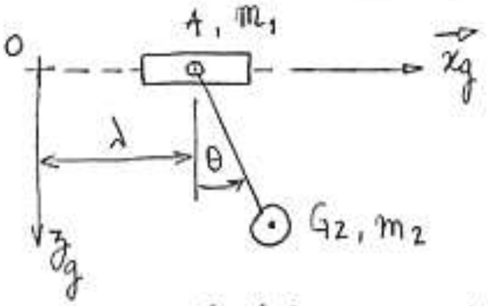
Il vient :

$$= \left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{AO}\right]_{R_g}\wedge m_2\,\overrightarrow{V_{G2/Rg}} + \left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{OG_2}\right]\wedge m_2\,\overrightarrow{V_{G2/Rg}} + \overrightarrow{AG_2}\wedge m_2\,\overrightarrow{\Gamma_{G2/Rg}}$$

$$\Rightarrow\ \overrightarrow{\delta_A(G_2/R_g)} = \left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{\sigma_A(G_2/R_g)}\right]_{R_g} + m_2\,\overrightarrow{V_{A/Rg}}\wedge\overrightarrow{V_{G2/Rg}}$$

Rq : $\overrightarrow{V_{A/Rg}}$ vitesse du point A, dérivée du vecteur position. peut être différente de $\overrightarrow{V_{A\in S_2/Rg}}$.

— Isolons $S_1 \cup S_2$ et appliquons le PFD :




G centre de gravité de $S_1 \cup S_2$.

$$\left\{ \mathcal{F}_{ext \to S_1 \cup S_2} \right\} = \left\{ \mathcal{D}_{S_1 \cup S_2 / R_g} \right\}.$$

Faisons le bilan des actions sur $S_1 \cup S_2$ :

Forces : $m_2 \cdot g \cdot \vec{z_g}$ en $G_2$ , $m_1 \cdot g \cdot \vec{z_g}$ en $A = G_1$.

$Z_{A01} \, \vec{z_g}$

Moment $M_{A01} \cdot \vec{y_g}$

Le PFD s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{A01} \, \vec{z_g} + m_1 g \, \vec{z_g} + m_2 g \, \vec{z_g} = (m_1 + m_2) \, \vec{\Gamma}_{G/R_g} \\ M_{A01} \, \vec{y_g} + \vec{AG_2} \wedge m_2 \cdot g \cdot \vec{z_g} = \vec{AG} \wedge (m_1 + m_2) \vec{\Gamma}_{G/R_g} \end{array} \right\}$$

Rq : $\vec{\Gamma}_{G/R_g} = \left[ \dfrac{d}{dt} \vec{V}_{G/R_g} \right]$ et $m_1 \vec{V}_{G_1/R_g} + m_2 \vec{V}_{G_2/R_g} = (m_1 + m_2) \vec{V}_{G/R_g}$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) \vec{\Gamma}_{G/R_g} = m_1 \vec{\Gamma}_{G_1/R_g} + m_2 \vec{\Gamma}_{G_2/R_g}.$$

Rq : $\vec{\delta}_A (S_1 \cup S_2 / R_g) = \vec{AG} \wedge (m_1 + m_2) \vec{\Gamma}_{G/R_g} = \vec{AG_1} \wedge m_1 \vec{\Gamma}_{G_1/R_g} + \vec{AG_2} \wedge m_2 \vec{\Gamma}_{G_2/R_g}$.

dem : $\left\{ \mathcal{F}_{ext \to S_1} \right\} = \left\{ \mathcal{F}_{\overline{S_1 \cup S_2} \to S_1} \right\} + \left\{ \mathcal{F}_{S_2 \to S_1} \right\}$

$\left\{ \mathcal{F}_{ext \to S_2} \right\} = \left\{ \mathcal{F}_{\overline{S_1 \cup S_2} \to S_2} \right\} + \left\{ \mathcal{F}_{S_1 \to S_2} \right\}$.

sommons :

$$\left\{ \mathcal{F}_{\overline{S_1 \cup S_2} \to S_1 \cup S_2} \right\} + \left\{ 0 \right\} = \left\{ \mathcal{D}_{S_1/R_g} \right\} + \left\{ \mathcal{D}_{S_2/R_g} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \mathcal{F}_{ext \to S_1 \cup S_2} \right\} = \left\{ \mathcal{D}_{S_1/R_g} \right\} + \left\{ \mathcal{D}_{S_2/R_g} \right\} = \left\{ \mathcal{D}_{S_1 \cup S_2 / R_g} \right\}$$

Les équations sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = (m_1 + m_2) \ddot{\lambda} + m_2 \ell \ddot{\theta} \cos\theta - \ell m_2 \dot{\theta}^2 \sin\theta \\ Z_{A01} + m_1 g + m_2 g = - m_2 \ell \ddot{\theta} \sin\theta - m_2 \ell \dot{\theta}^2 \cos\theta \\ M_{A01} - \ell \sin\theta \, m_2 g = \ell m_2 \ddot{\lambda} \cos\theta + \ell^2 m_2 \ddot{\theta} \end{array} \right.$$

On remarque que la première équation est une équation de mouvement à 2 inconnues $\lambda$ et $\theta$.

On s'aperçoit que pour connaître le comportement du modèle, les équations de mouvement suffisent : 2 équations, 2 inconnues cinématiques. Reste à résoudre.

$$\begin{cases} \ddot{\lambda}\cos\theta + l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \\ (m_1+m_2)\ddot{\lambda} + l m_2 \ddot{\theta}\cos\theta - l m_2 \dot{\theta}^2 \sin\theta = 0 \end{cases}$$

C'est un système de 2 équations différentielles non linéaires

Linéarisons dans le cas de petites oscillations.

$\sin\theta \simeq \theta \quad \cos\theta \simeq 1 \quad \dot{\theta}^2 = 0$.

$$\begin{cases} \ddot{\lambda} + l\ddot{\theta} + g\theta = 0 \\ (m_1+m_2)\ddot{\lambda} + l m_2 \ddot{\theta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\lambda} + l\ddot{\theta} + g\theta = 0 & (1) \\ \ddot{\lambda} + \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot l\ddot{\theta} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow \ddot{\theta} l \left(1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\right) + g\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)}\theta = 0. \qquad \text{sol : } \theta = \theta_0 \cos\omega t$$

et $\ddot{\lambda} = -\frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot l \cdot \ddot{\theta}$

$$\dot{\lambda} = -\frac{m_2}{m_1+m_2} l\dot{\theta} + C \qquad t=0 \quad \dot{\lambda} = 0 \text{ si } \dot{\theta} = 0 \quad C = 0.$$

$$\lambda = -\frac{m_2}{m_1+m_2} l\theta + Ct + D \qquad t=0 \quad \theta = \theta_0 \quad \lambda = \lambda_0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{m_2 l}{m_1+m_2}\theta_0\cos\omega t + D \qquad D = \lambda_0 + \frac{l m_2}{m_1+m_2}\theta_0.$$