METHODES ENERGETIQUES

Le théorème de l'énergie cinétique est une autre façon d'aborder la résolution d'un problème de dynamique ; le principe fondamental nous permet de connaître, après avoir isolé un solide ou un système de solides, les actions dans les liaisons, les trajectoires, l'évolution des paramètres de position. Le théorème de l'énergie cinétique, lui, nous permettra de trouver rapidement les équations de mouvement, mais ne nous permettra pas de déterminer les autres inconnues.

Dans cet exposé, les entités vectorielles sont en caractères gras.

1. Principe de conservation de la masse (utilisé dans les démonstrations):

F est une fonction de P et de t

on admet que : $\int (df(P,t)/dt)\, dm = d (\int f(P,t)\, dm)\, dt$

2. Rappels sur le principe fondamental de la dynamique des solides :

Pour un système mécanique E = {S1 + S2 + …} en mouvement dans Rg repère galiléen :

Le théorème de la résultante dynamique (1) s'écrit :

$$\sum \mathbf{F\ ext{\to}E} = m\,\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{(G/Rg)}$$
$$= m1\ \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{(G1/Rg)} + m2\ \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{(G2/Rg)} + \ldots$$

Le théorème du moment dynamique (2) s'écrit :

$$\sum \mathbf{Mts_A\ ext{\to}E} = m\,\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{A}}\mathbf{(E/Rg)}$$
$$= m1\ \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{A}}\mathbf{(S1/Rg)} + m2\ \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{A}}\mathbf{(S2/Rg)} \ldots$$

Le principe fondamental de la dynamique (3) s'écrit donc :

$$\{ F\ (ext \rightarrow S) \} = \{ D\ (S/Rg) \} = \{ \int \mathbf{\Gamma P/Rg}\ dm\ ;\ \int \mathbf{AP} \wedge \mathbf{\Gamma P/Rg}\ \ dm \}$$

Calcul du moment cinétique et du moment dynamique d'un solide S :

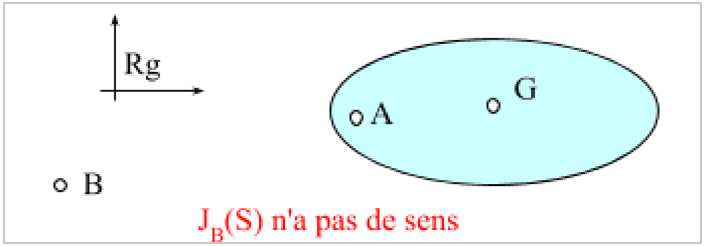
$$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{A}}\ \mathbf{(S/Rg)} = d\ [\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\ \mathbf{(S/Rg)}\ /\ dt\ ]_{Rg} + m\ \mathbf{VA/Rg} \wedge \mathbf{VG/Rg} \quad (4)$$
$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}\ \mathbf{(S/Rg)} = \int (\ \mathbf{AP} \wedge (\ \mathbf{\Omega S/Rg} \wedge \mathbf{AP}\ ) + m\ \mathbf{AG} \wedge \mathbf{VA{\in}S/Rg} \quad (5)$$

Il faut bien noter la différence entre **VA∈S/Rg** et **VA/Rg**

Dans un problème plan xy, de normale z , si **Ω**S/Rg = θ° **z**,

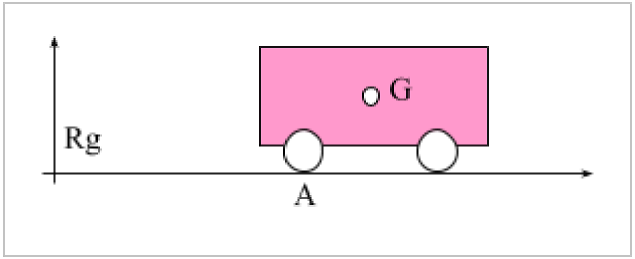
$$\boldsymbol{\sigma_A (S/Rg)} = J_{Az}\,(S)\,\theta°\,\mathbf{z} + m\,\mathbf{AG} \wedge \mathbf{V A{\in}S/Rg} \qquad (6)$$

- J_{Az} (S) n'a de sens que si A appartient au solide.



♣ Pour un solide S, de centre de masse G, en translation, rectiligne ou non, par rapport à Rg :

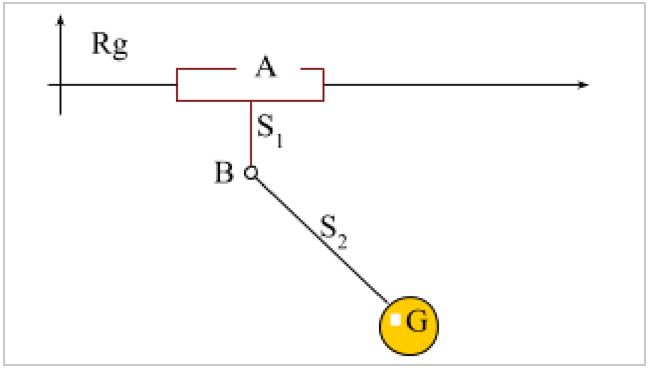
$$\boldsymbol{\sigma_G (S/Rg) = 0}.$$



$$\boldsymbol{\sigma_G (S/Rg)} = J_{Gz}\,(S)\,\theta°\,\mathbf{z} + m\,\mathbf{GG} \wedge \mathbf{V G{\in}S/Rg} \qquad (6)$$

♦ Pour un solide S, dont la masse est considérée concentrée en G,

$$\boldsymbol{\sigma}_G(S/Rg) = \mathbf{0}$$



♥ Pour trouver les moments cinétique et dynamique en des points quelconques, on utilise l'équiprojectivité des moments cinétiques et dynamiques :

$$\boldsymbol{\sigma}_A(S/Rg) = \boldsymbol{\sigma}_B(S/Rg) + \mathbf{AB} \wedge m\, \mathbf{VG/Rg}$$
$$\boldsymbol{\delta}_A(S/Rg) = \boldsymbol{\delta}_B(S/Rg) + \mathbf{AB} \wedge m\, \mathbf{\Gamma G/Rg}$$

3. Energie cinétique d'un solide

Pour une particule P, de masse m, l'énergie cinétique, c'est l'énergie emmagasinée par la particule P de masse m à la vitesse v :

$$Ec = \frac{1}{2} m v^2 \qquad \text{(entité scalaire)}$$

Justifions :

Une particule passe d'une vitesse v1 à une vitesse v2 entre les points A1 et A2, sur un axe x. La seconde loi de Newton permet d'écrire :

$F_x = m\, a_x$

$F_x = m\, dv/dt = m\, dv/dx\, dx/dt \Rightarrow F_x\, dx = m\, v\, dv$

En intégrant de A1 à A2, on obtient

$\int_1^2 F_x\, dx$ *(variation de travail, ou d'énergie)* $= m \int_1^2 v\, dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$

L'énergie cinétique d'une masse élémentaire est donc $dEc = \frac{1}{2}\, dm\, v^2$

Pour un solide S, constitué de volumes élémentaires de centre P, de masse dm, l'énergie cinétique sera donc :

$$Ec(S/Rg) = \tfrac{1}{2} \int_{(S)} (\mathbf{VP/Rg})^2 \, dm$$

On peut écrire cette énergie cinétique comme étant le co-moment de deux torseurs comme le montre la démonstration qui suit :

$$\begin{aligned}
2\,Ec(S/Rg) &= \int (\mathbf{VP/Rg})^2 \, dm \\
&= \int (\mathbf{VA{\in}S/Rg} + \mathbf{PA} \wedge \mathbf{\Omega S/Rg}) \cdot \mathbf{VP/Rg} \, dm \\
&= \mathbf{VA{\in}S/Rg} \cdot \int \mathbf{VP/Rg} \, dm + \int \mathbf{PA} \wedge \mathbf{\Omega S/Rg} \cdot \mathbf{VP/Rg} \, dm \\
&= \int \mathbf{VA{\in}S/Rg} \cdot \mathbf{VP/Rg} \, dm + \int \mathbf{VP/Rg} \wedge \mathbf{PA} \cdot \mathbf{\Omega S/Rg} \, dm \\
&= \mathbf{VA{\in}S/Rg} \cdot \int \mathbf{VP/Rg} \, dm + \mathbf{\Omega S/Rg} \cdot \int \mathbf{AP} \wedge \mathbf{VP/Rg} \, dm
\end{aligned}$$

On reconnaît le co-moment du torseur cinématique de S dans son mouvement par rapport à Rg, écrit en A, par le torseur cinétique de S dans son mouvement par rapport à Rg, écrit en A.

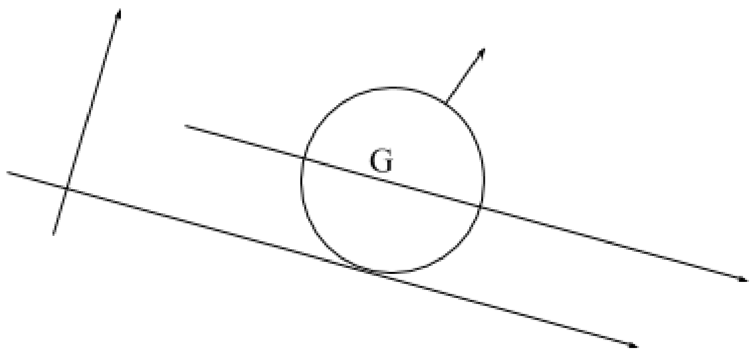
On en déduit que l'énergie cinétique d'un solide S en mouvement par rapport à Rg peut s'écrire sous la forme :

$$2\,Ec(S/Rg) = \{\, \mathbf{\Omega S/Rg} \;;\; \mathbf{VA{\in}S/Rg} \,\} \otimes \{\, \int \mathbf{VP/Rg} \, dm \;;\; \int \mathbf{AP} \wedge \mathbf{VP/Rg} \, dm \,\}$$

2 Ec(S/Rg) = { **V** S/Rg } ⊗ { **C** S/Rg }

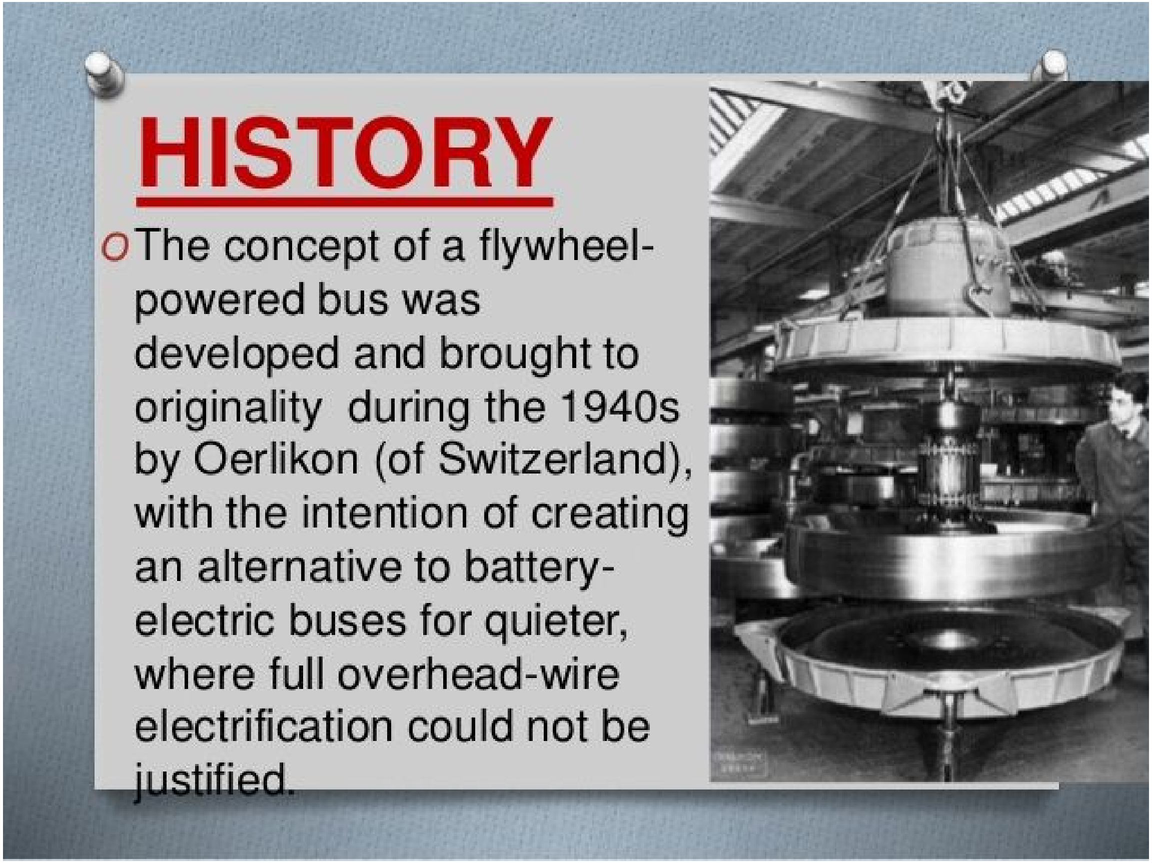
Dans le cas de mouvement plan, en G : Ec(S/Rg) = ½ m (**VG/Rg**)² + ½ J_G (S) (**ΩS/Rg**)²

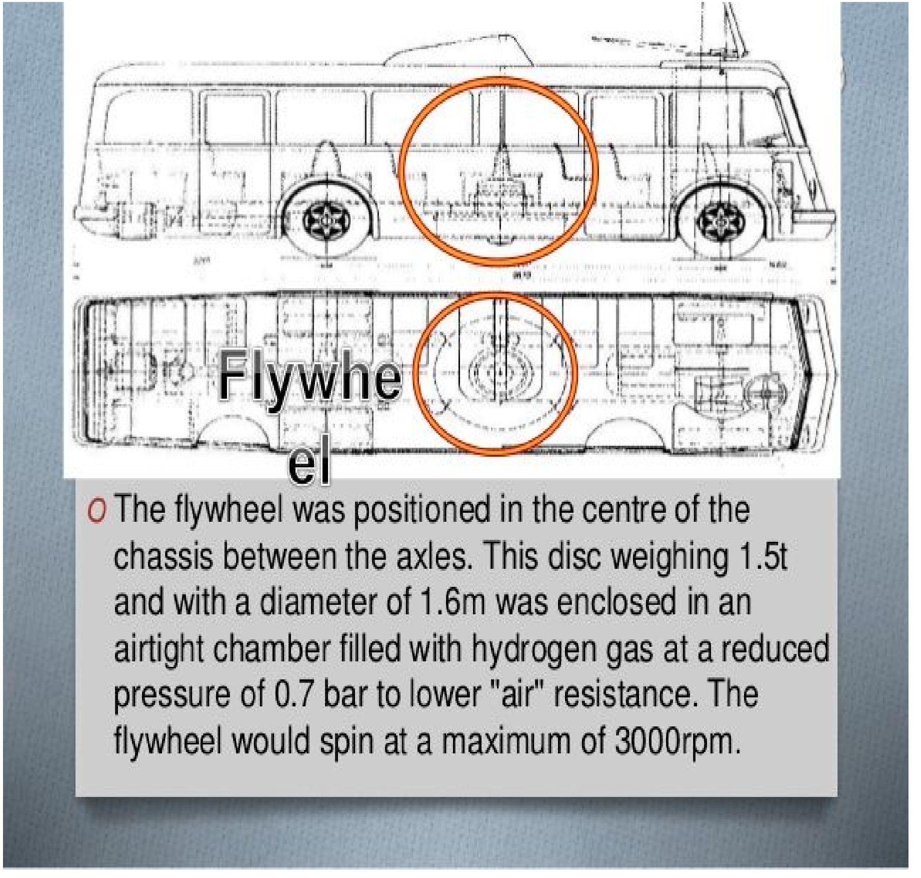
En application, on peut calculer l'énergie cinétique d'un cylindre de rayon R, d'inertie JGz, de masse M, dévalant sous son propre poids une pente rectiligne d'angle α avec l'horizontale, le long d'une ligne de plus grande pente, en roulant sans glisser avec une vitesse angulaire $\phi°$. Calculer cette énergie cinétique en G, centre de masse du cylindre, puis en I, point de contact du cylindre avec le plan incliné ; on trouvera bien sur le même résultat car le co-moment ne dépend pas du point de calcul choisi.



($Ec(s/Rg) = ½\, JGz\, \phi^{2} + ½\, M\, R^{2}\, \phi^{2} = ½\, Jiz\, \phi^{2}$)


10- M
JACOMOTT
0554 · P
G3

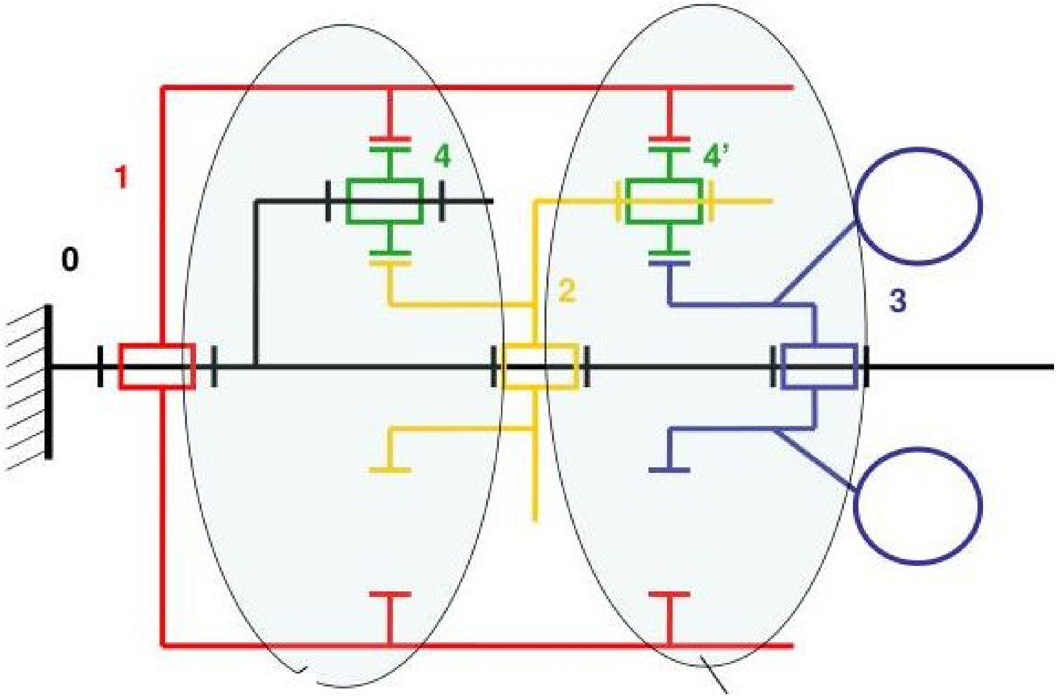

HISTORY
The concept of a flywheel-powered bus was developed and brought to originality during the 1940s by Oerlikon (of Switzerland), with the intention of creating an alternative to battery-electric buses for quieter, where full overhead-wire electrification could not be justified.


Flywhe
el
The flywheel was positioned in the centre of the chassis between the axles. This disc weighing 1.5t and with a diameter of 1.6m was enclosed in an airtight chamber filled with hydrogen gas at a reduced pressure of 0.7 bar to lower "air" resistance. The flywheel would spin at a maximum of 3000rpm.

Grande roue rayon R, petite roue r
Rapport de transmission entre roue arrières et volant d'inertie : 4
masse totale M

$Ec = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} Jr (v/r)^2 + 2 \frac{1}{2} JR (v/R)^2 + \frac{1}{2} Jvolant (4 v/R)^2 = \frac{1}{2} Mequ v^2$

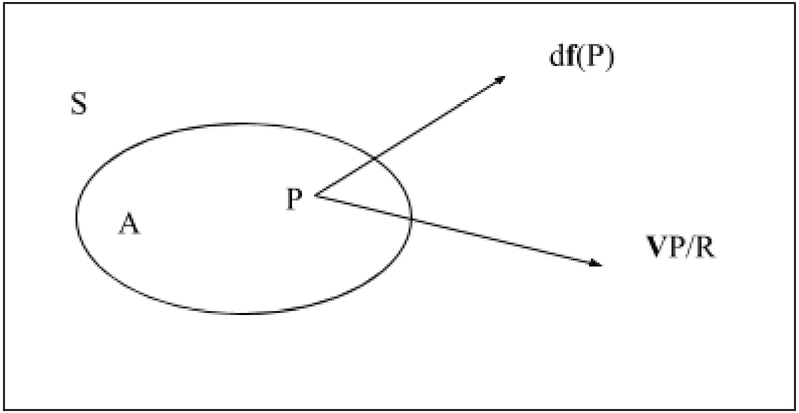
Calculer l'inertie équivalente de la poulie ci-dessous (toutes les pièces en plastique sauf (3)



1. Calculer $\omega 3/\omega 1$
2. Calculer l'inertie équivalente en fonction de J3 et des nombres de dents

https://www.funderstanding.com/educators/roller-coaster-game/

4. Puissance développée par une action mécanique extérieure à un solide, dans son mouvement par rapport à un repère R



Soit le solide S, de masse m. Isolons S, les forces exercées par l'extérieur sont les **df(P)** appliquées en P.
Soit A un point du solide.

$$\begin{aligned}
P(ext \rightarrow S/R) &= \int \mathbf{df(P) \cdot VP/R} \\
&= \int \mathbf{VP/R} \cdot \mathbf{df(P)} = \int (\mathbf{VA{\in}S/R} + \mathbf{PA} \wedge \mathbf{\Omega S/R}) \cdot \mathbf{df(P)} \\
&= \mathbf{VA{\in}S/R} \cdot \int \mathbf{df(P)} + \int \mathbf{PA} \wedge \mathbf{\Omega S/R} \cdot \mathbf{df(P)} \\
&= \mathbf{VA{\in}S/R} \cdot \int \mathbf{df(P)} + \int \mathbf{df(P)} \wedge \mathbf{PA} \cdot \mathbf{\Omega S/R} \\
&= \mathbf{VA{\in}S/R} \cdot \int \mathbf{df(P)} + \mathbf{\Omega S/R} \cdot \int \mathbf{AP} \wedge \mathbf{df(P)}
\end{aligned}$$

La puissance développée par une action mécanique extérieure à un solide en mouvement par rapport à un repère R quelconque :

$$P\ (ext \rightarrow S / R) = \int \mathbf{df(P)} \cdot \mathbf{VP/R}$$
$$= \{\ \mathbf{\Omega S/R}\ ;\ \mathbf{VA{\in}S/R}\ \} \otimes \{\ \int \mathbf{df(P)}\ ;\ \int\ \mathbf{AP} \wedge \mathbf{df(P)}\}$$

$$P\ (ext \rightarrow S / R) = \{V\ (S/R)\ \otimes \{\ F\ (ext{\rightarrow}S)\ \}$$

Quand la puissance est calculée avec le torseur cinématique de S dans son mouvement par rapport à Rg : **V (S/Rg)**, on parle alors de <u>puissance galiléenne</u>.

5 - Dérivée de l'énergie cinétique

La dérivée de l'énergie cinétique d'un solide en mouvement par rapport à un repère galiléen Rg est égale à la puissance des actions extérieures exercées sur elle :

$$d\,[\,Ec\,(S/Rg)\,]\,/\,dt = P\,(\,ext \rightarrow S\,/\,Rg\,)$$

On le démontre ainsi :

$$d\,[\,Ec\,(S/Rg)\,]\,/\,dt = d\,[\tfrac{1}{2}\int (\mathbf{VP/Rg})^2\,dm]\,/\,dt = \tfrac{1}{2}\int d(\mathbf{VP/Rg}^2\,dm)/dt$$

$$= \int \mathbf{VP/Rg} \cdot \mathbf{\Gamma P/Rg}\,dm = \int \mathbf{\Gamma P/Rg} \cdot (\mathbf{VA{\in}S/R} + \mathbf{PA} \wedge \mathbf{\Omega S/R})\,dm$$

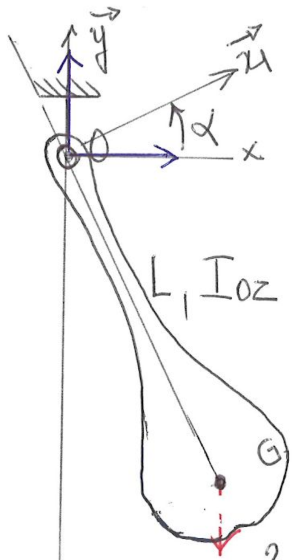
$$= \mathbf{VA{\in}S/R} \cdot \int \mathbf{\Gamma P/Rg}\,dm + \mathbf{\Omega S/R} \cdot \int \mathbf{AP} \wedge \mathbf{\Gamma P/Rg}\,dm$$

$$= \{\,V\,(S/Rg)\,\} \otimes \{\,D\,(S/Rg)\,\} = \{\,V\,(S/Rg)\,\} \otimes \{\,F\,(ext \rightarrow S)\,\}$$

$$d\,[\,E_c\,(S/R_g)\,]\,/\,dt = P\,(\,ext \;\; S\,/\,R_g\,)$$

L'expression trouvée constitue le THEOREME DE L'ENERGIE : la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide S est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à S.

Exercice Pendule PESANT



$$E_c = \frac{1}{2} I_{Oz} \dot{\alpha}^2$$

Energie cinétique

$$2E_c(S/R_g) = \{\mathcal{V}_{S/R_g}\} \otimes \{\mathcal{C}(S/R_g)\}$$

$$\{\mathcal{V}\ S/R_g\} = \left\{\dot{\alpha}\,\vec{z}\ ;\ \vec{0}\right\}_O$$

$$\{\mathcal{C}\ (S/R_g)\} = \left\{m.L\dot{\alpha}\,\vec{x_1}\ ;\ I_{Oz}\,\dot{\alpha}\,\vec{z}\right\}_O$$

Puissance galiléenne

$$\mathcal{P}(ext \rightarrow S/_{Rg}) = \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha}\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O \otimes \left\{ \begin{matrix} - \\ \vec{OG} \wedge -mg\,\vec{y} \end{matrix} \right\}_O$$

$$= \dot{\alpha}\vec{z} \cdot (-L\vec{y}_1 \wedge -mg\,\vec{y})$$

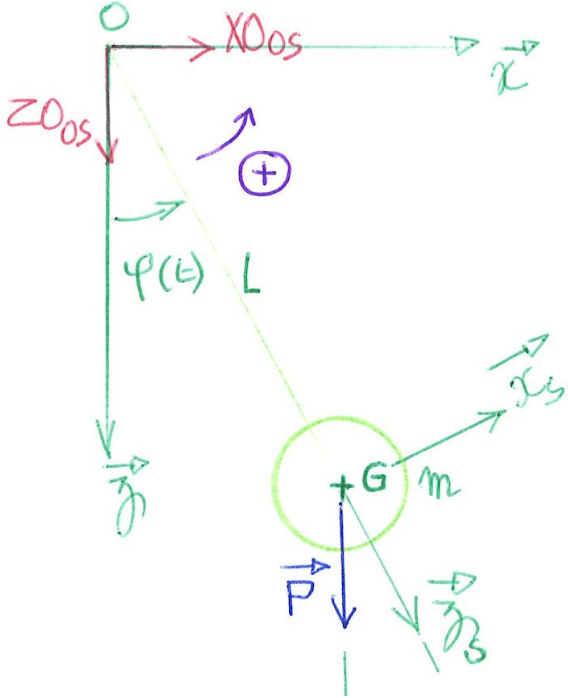
$$= -\dot{\alpha}\vec{z} \cdot Lmg \sin\alpha\,\vec{z} = -Lmg\dot{\alpha}\sin\alpha.$$

Dérivons l'Ec.

$$I_{Oz}\cancel{\dot{\alpha}}\ddot{\alpha} + Lmg\cancel{\dot{\alpha}}\sin\alpha = 0.$$

$$I_{Oz}\ddot{\alpha} + Lmg\sin\alpha = 0.$$

Pendule masse concentrée



$\left\{ \mathcal{V}_{S/Rg} \right\}$?

$\left\{ \mathcal{C}_{S/Rg} \right\}$?

$\left\{ \mathcal{F}_{ext \to S} \right\}$?

$$\left\{\mathcal{V}_{S/R_g}\right\} = \left\{\dot{\varphi}\,\vec{y}\,;\,\vec{0}\right\}_O = \left\{\dot{\varphi}\,\vec{y}\,;\,L\dot{\varphi}\,\vec{x_S}\right\}_G$$

$$\left\{\mathcal{C}_{S/R_g}\right\} = \left\{m.L\dot{\varphi}\,\vec{x_S}\,;\,L\vec{z_S}\wedge m.L\dot{\varphi}\,\vec{x_S}\right\}_O = \left\{mL\dot{\varphi}\,\vec{x_S}\,;\,\vec{0}\right\}_G$$

$$\left\{\mathcal{F}_{ext\to S}\right\} = \left\{X_{O_{0S}}\vec{x} + Z_{O_{0S}}\vec{z} + mg\vec{z}\,;\,L\vec{z_S}\wedge mg\vec{z}\right\}_O$$

$$2E_c = \left\{\dot{\varphi}\,\vec{y}\,;\,\vec{0}\right\}_O \otimes \left\{mL\dot{\varphi}\,\vec{x_S}\,;\,mL^2\dot{\varphi}\,\vec{y_S}\right\}_O = mL^2\dot{\varphi}^2$$

$$2E_c = \left\{\dot{\varphi}\,\vec{y}\,;\,L\dot{\varphi}\,\vec{x_S}\right\}_G \otimes \left\{mL\dot{\varphi}\,\vec{x_S}\,;\,\vec{0}\right\}_G = mL^2\dot{\varphi}^2$$

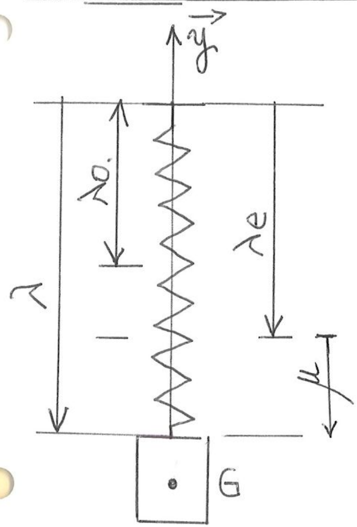
$$\mathcal{P}_{F_{ext}} = \left\{\dot{\varphi}\,\vec{y}\,;\,\vec{0}\right\}_O \otimes \left\{-\,;\,-Lmg\sin\varphi\,\vec{y}\right\}_O = -Lmg\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$E_c = \frac{1}{2}mL^2\dot{\varphi}^2 \qquad \frac{d}{dt}E_c = \cancel{m}.L^{\cancel{2}}.\ddot{\varphi}.\cancel{\dot{\varphi}} = -\cancel{L}\cancel{m}g\cancel{\dot{\varphi}}\sin\varphi$$

PETITES OSCILLATIONS

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\varphi = 0$$

Exercice masse - ressort



$$Ec = \frac{1}{2} m . \dot{\lambda}^2$$

$$\left\{ \vec{0} \; ; -\dot{\lambda} \, \vec{y} \right\} \otimes \left\{ m . -\dot{\lambda} \vec{y} \; ; \; - \right\}$$

Puissance galiléenne.

$$\mathcal{P}(ext \to S/_{Rg}) = \left\{ \vec{0} \; ; -\dot{\lambda} \vec{y} \right\} \times \left\{ -mg \vec{y} \right.$$

$$\mathcal{P}(ext \to S/_{Rg}) = \left\{ \vec{0} \; ; -\dot{\lambda} \vec{y} \right\} \otimes \left\{ -mg \vec{y} + K (\lambda - \lambda_0) \vec{y} \; ; \vec{0} \right\} \quad + K(\lambda - \lambda_0) \vec{y}$$

or $mg \vec{y} = K (\lambda_e - \lambda_0) \vec{y}$ à l'équilibre.

$$\left\{ -K\lambda_e + \cancel{K\lambda_0} + K\lambda - \cancel{K\lambda_0} \right\}$$

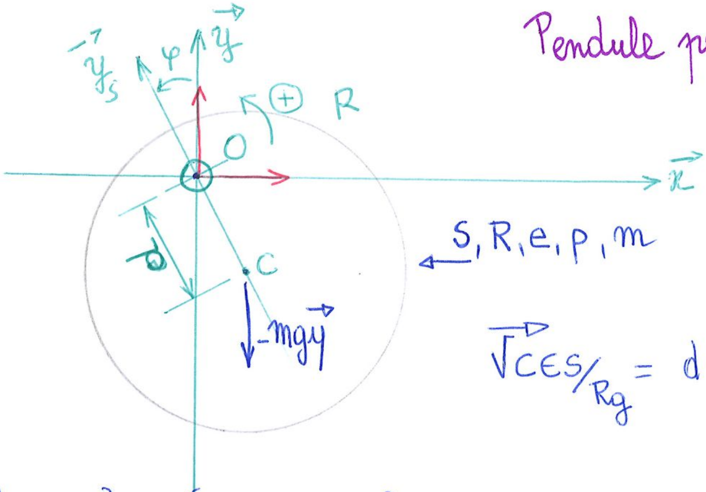
$$\mathcal{P}(ext \to S/R_g) = -\dot{\lambda}\,(K(\lambda - \lambda_e) =$$

$$\Rightarrow m\,\dot{\lambda}\,\ddot{\lambda} = -\dot{\lambda}\,K(\lambda - \lambda_e).$$

$$\boxed{m\,\ddot{\lambda} + K(\lambda - \lambda_e) = 0}.$$

$$m\,\ddot{\mu} + K\,\mu = 0$$

Pendule pesant



$$\vec{V}_{C\in S/R_g} = d\dot{\varphi}\,\vec{x}_s$$

$$\left\{\mathcal{V}_{S/R_g}\right\} = \left\{\dot{\varphi}\,\vec{z}\ ;\ \vec{0}\right\}_O = \left\{\dot{\varphi}\,\vec{z}\ ;\ d\dot{\varphi}\,\vec{x}_s\right\}_C$$

$$\left\{\mathcal{C}_{S/R_g}\right\} = \left\{m\,d\dot{\varphi}\,\vec{x}_s\ ;\ J_C\,\dot{\varphi}\,\vec{z}\right\}_C$$

$$\left\{\mathcal{F}_{ext\to S}\right\} = \left\{X_{O_{01}}\vec{x} + Y_{O_{01}}\vec{y}\ ;\ \vec{0}\right\}_O + \left\{-mg\vec{y}\ ;\ -mg\sin\alpha\,d\,\vec{z}\right\}_O$$

$$2Ec = \left\{ \dot{\varphi}\vec{z} \; ; \; d\dot{\varphi}\vec{x_s} \right\}_C \otimes \left\{ m.d\dot{\varphi}x_s \; ; \; Jc\dot{\varphi}\vec{z} \right\}_C$$

$$Ec = \frac{1}{2} Jc \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} md^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}(J_C + md^2)\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{d}{dt}Ec = (J_C + md^2)\dot{\varphi}\ddot{\varphi}$$

$$\mathcal{P}_{Fext \to S} = \left\{ \dot{\varphi}\vec{z} \; ; \; \vec{0} \right\}_0 \otimes \left\{ - \; ; \; -mg\sin\alpha \, d\vec{z} \right\}_0$$

$$= -mgd\sin\alpha\,\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \left[Jc + md^2 \right]\ddot{\varphi} + mgd\sin\alpha = 0.$$

Energie potentielle

6 - L'énergie potentielle

Un solide possède une énergie potentielle s'il a la capacité de produire un travail. Un pot de fleur sur un balcon, l'élastique qui fait tourner l'hélice de maquette d'avion après que l'on ait torsadé l'élastique… Les sources d'énergie potentielle en mécanique des solides sont essentiellement la pesanteur, les ressorts, les gaz comprimés…

Définition : un solide S possède une énergie potentielle Ep si :

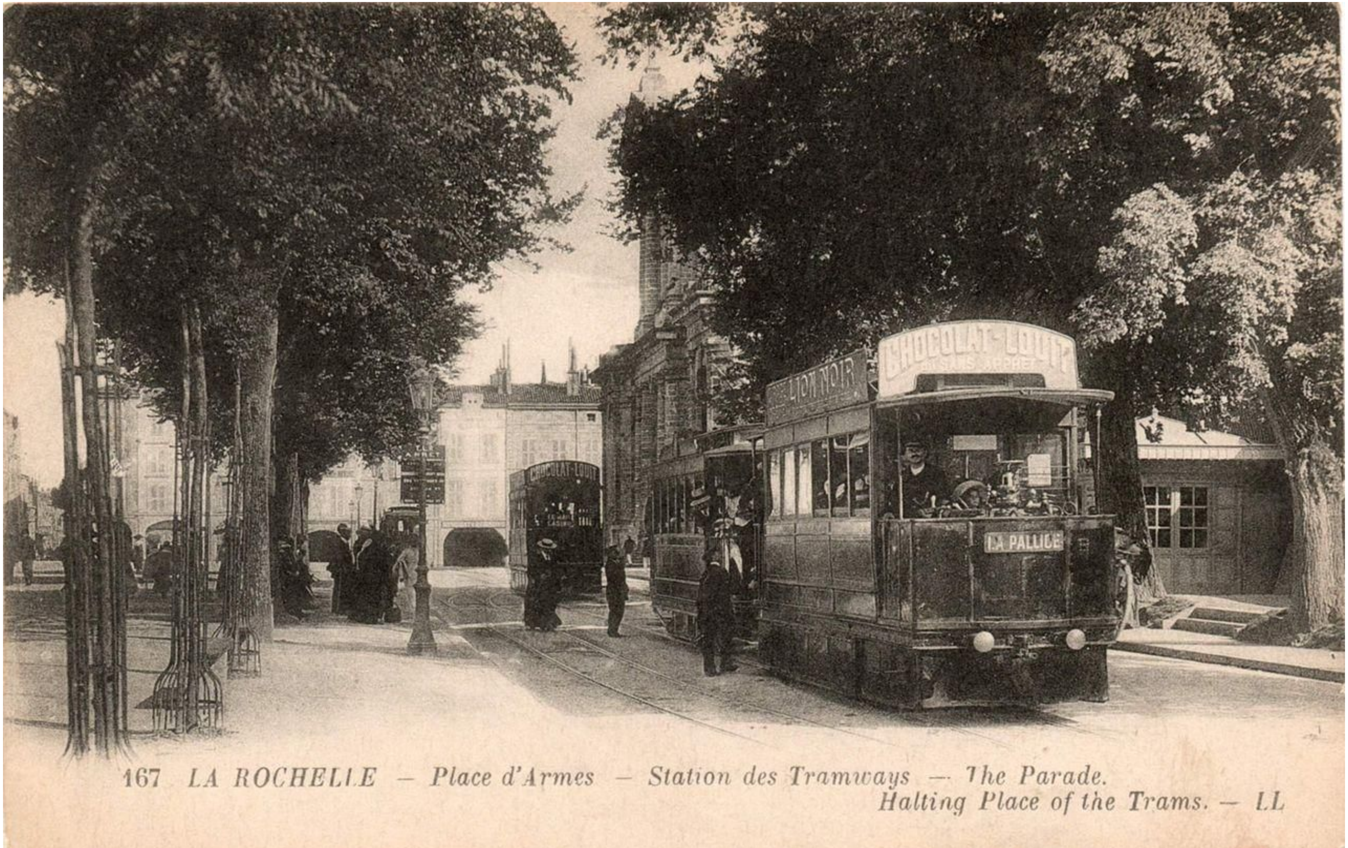
$$P(\text{action ext} \rightarrow S / Rg) = - d\,[Ep(\text{ action ext} \rightarrow S / Rg)]/dt$$

A retenir :

$$Ep(\text{ gravité} \rightarrow S / Rg) = - m\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{OG}$$

$$Ep(\text{ressort hélicoïdal} \rightarrow S / Rg) = \tfrac{1}{2} K\, (\lambda(t) - \lambda_o)^2$$

$$Ep(\text{ressort de torsion} \rightarrow S / Rg) = \tfrac{1}{2} C\, (\alpha(t) - \alpha_o)^2$$


CHOCOLAT-LOUIT
LION NOIR
LA PALLICE
CHOCOLAT-LOUIT
167 LA ROCHELLE – Place d'Armes – Station des Tramways – The Parade.
Halting Place of the Trams. – LL

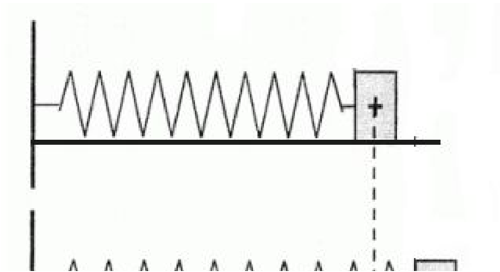

OneFlow AIR
LAND ROVER

WIKIPEDIA

L'**énergie potentielle** d'un système physique est l'énergie liée à une interaction, qui a le potentiel (d'où le nom) de se transformer en énergie cinétique.

Elle est une fonction de ce système, dépendant des coordonnées d'espace, et éventuellement du temps, ayant la dimension d'une énergie et qui est associée à une **force dite conservative** dont l'expression s'en déduit par **dérivation**. La différence entre les énergies potentielles associées à deux points de l'espace est égale à l'opposé du travail de la force concernée pour aller d'un point à l'autre, et ce quel que soit le chemin utilisé. Elle peut être de nature diverse, suivant le système étudié et la force qui en est déduite :

- Énergie potentielle mécanique ;
- Énergie potentielle gravitationnelle ;
- Énergie potentielle de pesanteur ;
- Énergie potentielle élastique ;
- Potentiel chimique ;
- Énergie potentielle électrostatique ;
- Énergie potentielle magnétique.
- Énergie potentielle de pression



gne

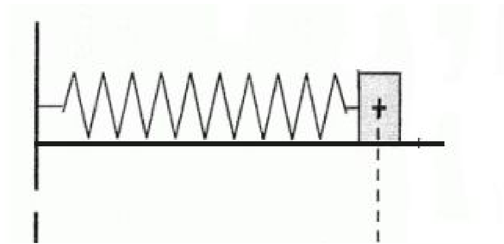
Energie potentielle d'un ressort

$\lambda(t)$ longueur du ressort
λo longueur du ressort à vide
Axe **x** orienté à droite
A : Extrémité du ressort
O : Origine fixe

Déterminer la force du ressort

Déterminer la puissance exercée par le ressort

Quelle expression dérive-t-on pour retrouver l'expression de la puissance ?



Energie potentielle d'un ressort

Déterminer la force du ressort

$\vec{F} = - K (\lambda-\lambda o)\ \vec{x}$

Déterminer la puissance exercée par le ressort

O

$P = - K (\lambda-\lambda o)\ \lambda^\circ$

Quelle expression dérive-t-on pour retrouver l'expression de la puissance ?

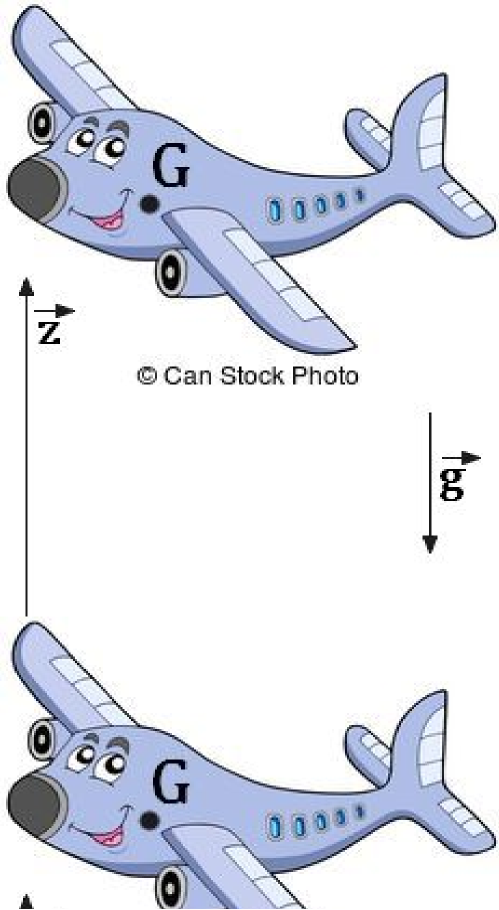
$Ep = \frac{1}{2} K (\lambda-\lambda o)^2$

Energie potentielle de pesanteur

$\lambda(t)$ altitude de G
$\mu(t)$ le déplacement horizontal
M la masse
$\mathbf{P}$ le poids : $-M g \mathbf{z} = M \mathbf{g}$

Déterminer la puissance exercée par le poids

Quelle expression dérive-t-on pour retrouver l'expression de la puissance ?



Energie potentielle de pesanteur

$\vec{P}$ le poids : – M g $\vec{z}$ = M $\vec{g}$

Déterminer la puissance exercée par le poids

- M g $\vec{z}$ · λ° $\vec{z}$

Quelle expression dérive-t-on pour retrouver l'expression de la puissance ?

M g λ

Ep (gravité→S/Rg) = - m $\vec{g} \cdot \vec{OG}$

Retenir sous cette forme !

7 - Loi de conservation de l'énergie cinétique :

Si toutes les puissances dérivent d'un potentiel, alors

$$P(ext \rightarrow S/Rg) = - d[Ep(ext \rightarrow S/Rg)]/dt$$

On dit que le système est " conservatif "

$$P(ext \rightarrow S/Rg) = d\,[\,Ec\,(S/Rg)\,]\,/\,dt = - d\,[Ep(ext \rightarrow S/Rg)]\,/\,dt$$

$$d\,[\,Ec\,(S/Rg)\,]\,/\,dt + d\,[Ep(ext \rightarrow S/Rg)]\,/\,dt = 0$$

$$Ec\,(S/Rg) + Ep(ext \rightarrow S/Rg) = \text{constante}$$

Si toutes les puissances ne dérivent pas d'un potentiel, alors

$$d\,[\,Ec\,(S/Rg)\,]\,/\,dt + d\,[Ep(ext\rightarrow S/Rg\,)]\,/\,dt\,) = P(fext_{nc}\rightarrow S/Rg)$$

$fext_{nc}$ forces extérieures non conservatives
On trouve, dans les puissances qui ne dérivent pas d'un potentiel, l'énergie que reçoit le solide de l'extérieur (exemple un moteur) ou perdue par le solide (frottements, freinage …).

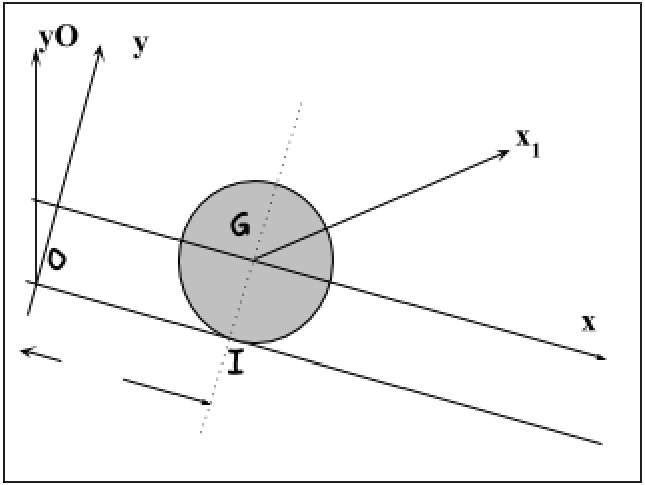
Exemple : un camion en haut d'une cote a une énergie potentielle. Pour descendre, il va aussi utiliser son moteur (il reçoit une énergie extérieure par la combustion du carburant), les pneus au sol provoquent des résistances au roulement dues à la déformation des pneus (il perd une énergie dissipée en chaleur), l'air provoque un frottement (il perd une énergie dissipée en chaleur).

$$d\,[\,Ec\,(S/Rg)\,]\,/\,dt + d\,[Ep(ext \to S/Rg\,)]\,/\,dt\,) = P(fext_{nc} \to S/Rg)$$

$P(fext_{nc} \to S/Rg)$ on trouve dans ce terme la puissance donnée par le moteur, les puissances perdues par les frottements.

A l'aide de ce théorème, on peut maintenant traiter de problèmes faisant intervenir 1 seul solide. Quand le problème fait intervenir plusieurs solides, en liaison entre eux, avec frottement ou non, présentant des actions extérieures, mutuelles, il faut faire appel au théorème de l'énergie cinétique appliquée à un ensemble de solides. Ce qui fait l'objet de la troisième partie du cours

❶ Déterminer l'équation de mouvement du cylindre roulant le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné de α avec l'horizontale .



Paramétrage : (+) et (+)

Le déplacement se fait sur **x** (+) étant le paramètre qui définit la position de G, (+) = (**x** , $\mathbf{x_1}$) étant le paramètre définissant le changement d'orientation de S par rapport à Rg

Ep(pesanteur→S/Rg) = - m $\vec{g} \cdot \vec{OG}$ = - m g λ sinα (α pente de la droite, constant)

Ec(S/Rg) = ½ m λ² + ½ I_{Gz} φ²

d/dt Ep(pesanteur→S/Rg) + d/dt Ec(S/Rg) = 0

$[m + (I_{Gz})/R^2] \ddot{\ } = m g \sin\alpha$

ESSAI DE RÉSILIENCE

-Au départ, **le pendule** est placé à une hauteur paramétrée qui devra délivrer une **énergie normalisée** de 294 Joules (si l'on tient compte de la gravité de 9,81 m/s^2)
-Le **pendule est libéré**, ce qui grâce à son propre poids, provoquera **un choc.**
L'éprouvette encaissera une partie du choc, mais sera brisée.
-Le **pendule** continuera dans son élan jusqu'à une certaine hauteur, ce qui permettra de mesurer l' **énergie absorbée par l'éprouvette.**
-L'**énergie absorbée** est calculée grâce à **W=P (h0-h1)** (P en N)

Exercices proposés

- **<u>Un pendule simple</u>**, de longueur L, de masse M, de ressort de rappel C(N.m/rd), un frottement visqueux u, de position repos verticale.

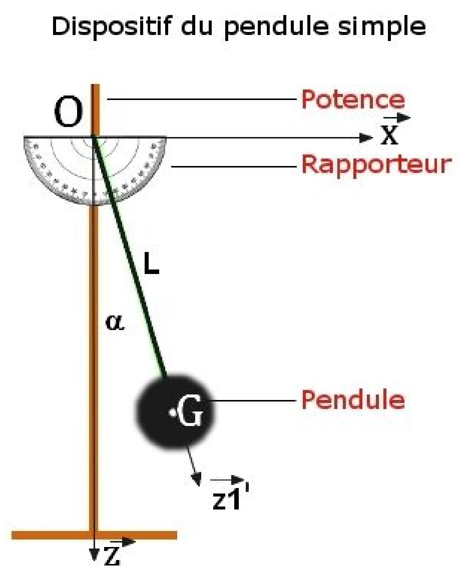
Faire le bilan des actions

Ecrire l'énergie cinétique

Ecrire les énergies potentielles

Ecrire la puissance des forces non conservatives

Appliquer le théorème de l'énergie appliqué à un solide.



Un pendule simple, de longueur L, de masse M, de ressort de rappel C(N.m/rd), un frottement visqueux u, de position repos verticale.

Faire le bilan des actions

Ecrire l'énergie cinétique

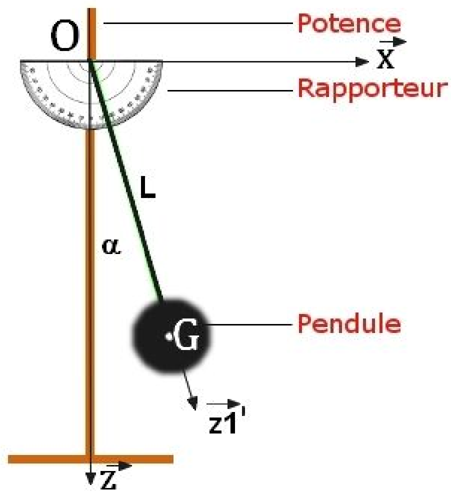
Ecrire les énergies potentielles

Ecrire la puissance des forces non conservatives

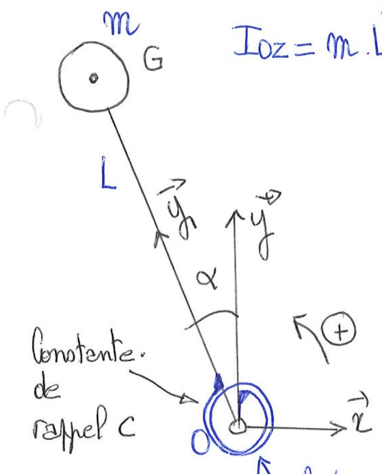
Appliquer le théorème de l'énergie appliqué à un solide.

$$\boxed{Ml^2\ {}^{\circ\circ}(t) + \ {}^{\circ}(t) + [C+ MgL]\ (t) = 0}$$

Dispositif du pendule simple



Pendule inversé



$I_{Oz} = m.L^2$

$$\{\mathcal{V}\} = \left\{\dot{\alpha}\vec{z} \,;\, \vec{0}\right\}_O$$

$$\{\mathcal{C}\} = \left\{-mL\dot{\alpha}\vec{x_1} \,;\, I_{Oz}\dot{\alpha}\vec{z}\right\}_O$$

$$\{\mathcal{F}\} = \left\{- \,;\, (mgL\sin\alpha - C\alpha - f\dot{\alpha})\vec{z}\right\}$$

frottement visqueux dans la liaison $f\,(Nm/_{rd.s^{-1}})$

$$I_{Oz}\cancel{\dot{\alpha}}\ddot{\alpha} + \cancel{\dot{\alpha}}(C - mg)\alpha + f\cancel{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} = 0.$$

$$I_{Oz}\ddot{\alpha} + f\dot{\alpha} + (C - mg)\alpha = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow C > mg.$$

Par l'énergie potentielle.

$$Ec(S/R_g) = \frac{1}{2} I_{oz} \dot{\alpha}^2$$

supposé nul

$$Ep(\text{ressort} \rightarrow S/R_g) = \frac{1}{2} C(\alpha - \alpha_0)^2$$

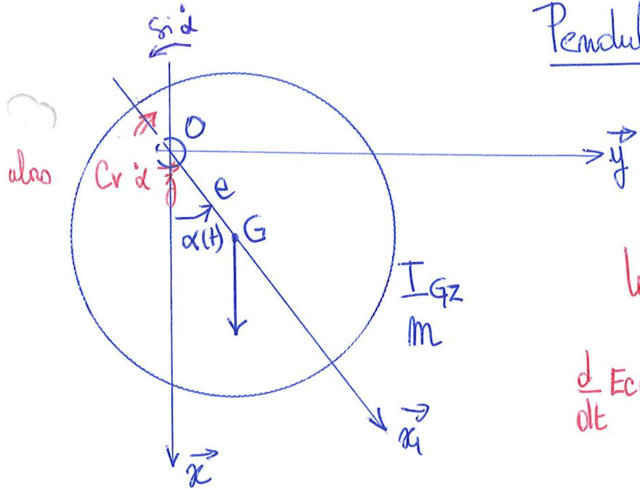
$$Ep(\text{pesanteur} \rightarrow S/R_g) = +L\cos\alpha\, m g$$

$$\mathcal{P}(\text{frott. visqueux} \rightarrow S/R_g) = -f\dot{\alpha}^2$$

$\mathcal{P}(\text{liaison pivot} \rightarrow S/R_g) = 0$ (liaison parfaite sans le frott. vis.)

Pendule amorti.

7



Le système n'est pas conservatif

$$\frac{d}{dt}Ec(S/R_g) + \frac{d}{dt}\mathcal{P}(ext \to S/R_g) = \mathcal{P}(f_{ext_{nc}} \to S/R_g)$$

ici le frottement visqueux

$$Ec = \frac{1}{2} m e^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} J_{Gz} \dot{\alpha}^2$$

$$Ep_{g \to S} = -m \cdot g \vec{x} \cdot e \vec{x}_1 = -m \cdot g \cdot e \cos\alpha$$

$$\frac{d}{dt}Ec(S/R_g) + \frac{d}{dt}Ep_{g \to S} = \mathcal{P}_{f_{ext_{nc}} \to S}.$$

$$(J_{Gz}+me^2)\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + mge\dot{\alpha}\sin\alpha = \left\{\vec{0} ; -C_v\dot{\alpha}\vec{z}\right\}_O \otimes \left\{\dot{\alpha}\vec{z} ; \vec{0}\right\}_O$$

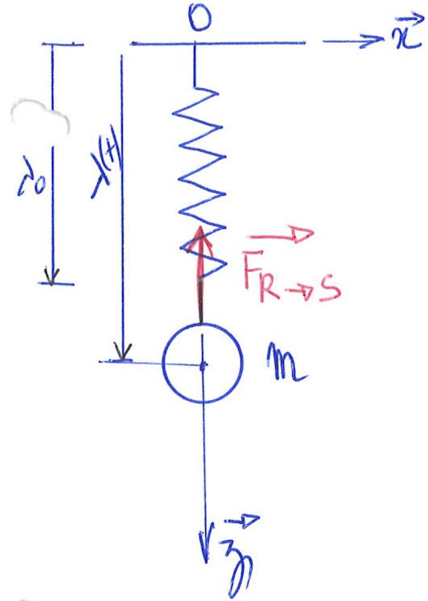
$$(J_{Gz}+me^2)\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + mge\dot{\alpha}\sin\alpha = -C_v\dot{\alpha}^2$$

α petit :

$$(J_{Gz}+me^2)\ddot{\alpha} + C_v\dot{\alpha} + mge\,\alpha = 0.$$

Sinusoïde amortie.

6



$$E_c(S/R_g) = \frac{1}{2}\dot{\lambda}^2 m$$

$$E_p(g \to S/R_g) = -m\,\vec{g}\cdot\vec{OG}$$

$$= -m\cdot g\cdot\vec{z}\cdot\lambda\vec{z}$$

$$E_p(g \to S/R_g) = -m g \lambda.$$

$$E_p(R \to S) = \frac{1}{2} K (\lambda - \lambda_0)^2$$

$$\frac{d}{dt} Ec(S/_{Rg}) + \frac{d}{dt} Ep(g \rightarrow S/_{Rg}) = \dot{\lambda}\ddot{\lambda} m - m g \dot{\lambda} + K.\dot{\lambda}(\lambda - \lambda_0) = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{\lambda} - gm + K\lambda^{(t)} - K\lambda_0 = 0$$

à l'équilibre

$$-g.m + K(\lambda_{eq} - \lambda_0) = 0$$

$$mg = +K\lambda_{eq} - K\lambda_0 .$$

$$m\ddot{\lambda} + K\lambda = K\lambda_0 + mg$$

$$m\ddot{\lambda} + K\lambda = K\lambda_{eq}$$

$$\boxed{\ddot{\lambda} + \frac{K}{m}\lambda = \frac{K}{m}\lambda_{equ}}$$

Si toutes les puissances dérivent d'un potentiel, alors le système est dit « conservatif »

$$d[Ec\,(S/Rg)]/dt + d[Ep(ext \rightarrow S/Rg)]/dt\,) = 0$$

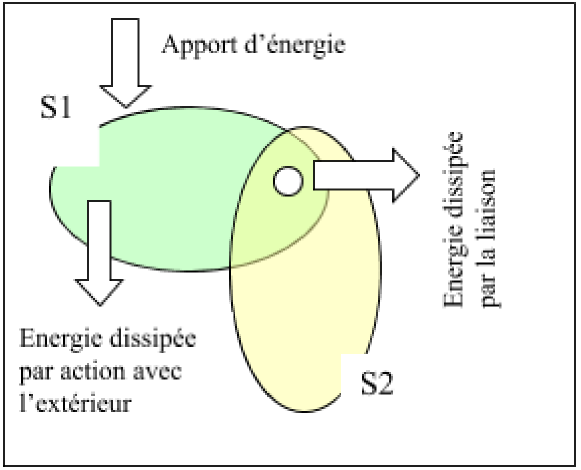
$$Ec(S/Rg) + Ep(ext \rightarrow S/Rg) = Cte$$

Intégrale première de l'énergie

SYSTEMES DE SOLIDES

Jean-Charles Devigne

8 - Théorème de l'énergie cinétique appliqué à un système de solides



L'énergie cinétique de plusieurs solides est égale à la somme des énergies cinétiques des différents solides composant le système.

L'énergie potentielle de plusieurs solides est égale à la somme des énergies potentielles des différents solides composant le système.

Le système peut comporter une énergie potentielle due à une action <u>mutuelle</u> entre deux solides (par exemple une liaison élastique). Le système peut recevoir de l'énergie de l'extérieur, perdre de l'énergie par frottement, il peut en perdre ou en gagner à cause ou grâce à une action mutuelle (frottement dans une liaison, moteur entre deux solides, …)

Le théorème de l'énergie cinétique devra alors tenir compte de ces pertes ou de ces gains.

Développons. Soit un système composé de deux solides S1 et S2.

2 Ec(S1∪S2/Rg)= { V S1/Rg } ⊗ { C S1/Rg } + { V S2/Rg } ⊗ { C S2/Rg }

On peut écrire :

d [Ec (S1∪S2/Rg)] / dt = P ($\overline{S1}$ →S1/Rg) + P ($\overline{S2}$ →S2/Rg)

= P (S2→S1/Rg) + P ($\overline{S1S2}$ →S1/Rg) + P (S1→S2/Rg) + P ($\overline{S1S2}$ →S2/Rg)

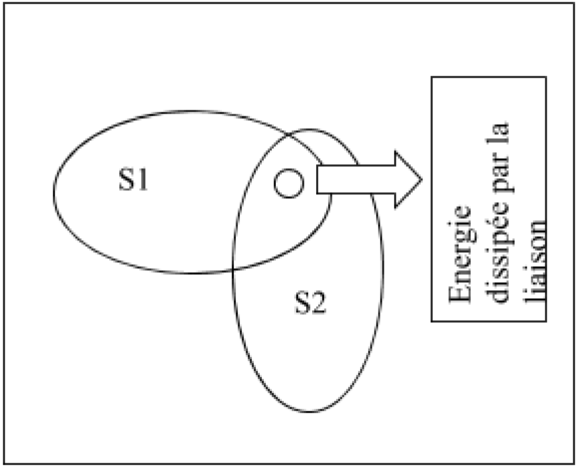
d[Ec(S1∪S2/Rg)]/dt = P($\overline{S1S2}$ →S1∪S2/Rg) + P (S2→S1/Rg) + P

(S1→S2/Rg)

→ La dérivée de l'énergie cinétique du système isolé est égale à la puissance des forces extérieures au système isolé P($\overline{S1S2}$ →S1∪S2/Rg) + la puissance des forces intérieures au système P (S2→S1/Rg) + P (S1→S2/Rg)

La puissance des forces intérieures au système n’est pas facile à calculer sous cette forme, cela risque d’être laborieux pour chaque liaison …

9 - Puissance des actions mutuelles



Soit R un repère.
La puissance des actions mutuelles entre S1 et S2 se définit comme suit :

P(S1S2/R) + P(S2S1/R)
notée = P(S1/RS2/R)

Nous allons démontrer que cette puissance est <u>indépendante du repère</u>

Ecrivons :

$$P(S1\rightarrow S2/R) - P(S1\rightarrow S2/R1)$$

$$= \{ V\ (S2/R) \} \otimes \{ F\ (S1\rightarrow S2) \} - \{ V\ (S2/R1) \} \otimes \{ F\ (S1\rightarrow S2) \}$$

Or { V (S2/R) } = { V (S2/R1) } + { V (R1/R) } (Composition des vitesses)

$\Rightarrow$ P(S1→S2/R) - P(S1→S2/R1) = { V (R1/R) } $\otimes$ { F (S1→S2) }

$\Rightarrow$ P(S2→S1/R) - P(S2→S1/R1) = { V (R1/R) } $\otimes$ { F (S2→S1) }

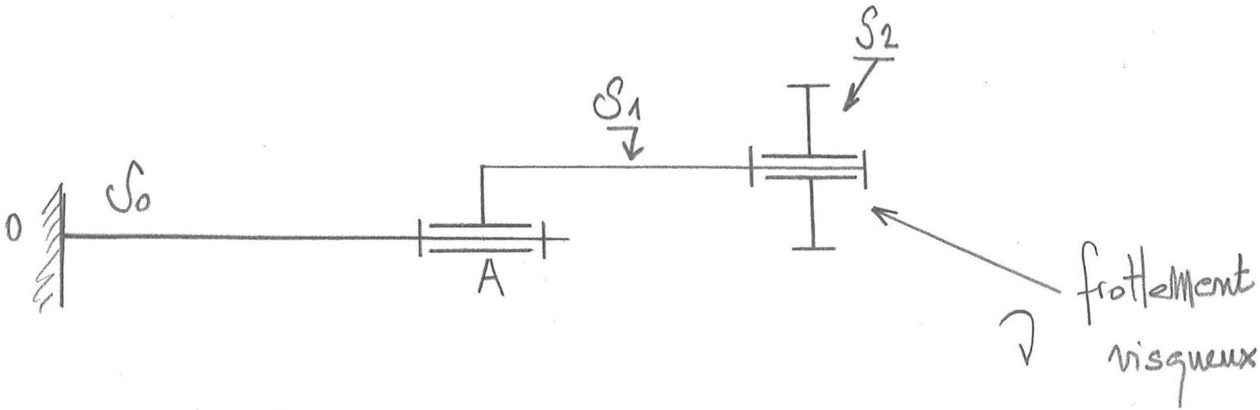
additionnons les deux expressions :

P(S1→S2/R) + P(S2→S1/R) – [P(S1→S2/R1) + P(S2→S1/R1)] = 0

$\Rightarrow$ P(S1/R↔S2/R) = P(S1/R1↔S2/R1)

La puissance des forces intérieurs P(S1↔S2)ne dépend pas du point choisi.

Puissance dans la liaison entre 1 et 2, $\vec{x}$ horizontal vers la droite, $\vec{y}$ vertical ascendant.



$P(S1 \leftrightarrow S2) =$ $\{F(S1 \rightarrow S2)\} \otimes \{V(S2/S1)\} + \{F(S2 \rightarrow S1)\} \otimes \{V(S1/S1)\}$

$\{XA01\ \vec{x} + YA01\ \vec{y} + ZA01\ \vec{z}\ ;\ 0\ \vec{x} + MA01\ \vec{y} + NA01\ \vec{z}\} \otimes \{\ \dot{}\ \ \vec{x}\ ;\ \vec{0}\ \}$

$$+ \{\vec{0}\ ;\ -\mathrm{U}^{\cdot}\ \vec{x}\} \otimes \{^{\cdot}\ \vec{x}\ ;\ \vec{0}\} = -\mathrm{U}^{\cdot\ 2}$$

Théorème de l'énergie cinétique appliqué à un ensemble de solides dans leur mouvement par rapport à un repère galiléen

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$d[Ec(S1 \cup S2/Rg)]/dt = P(\overline{S1S2} \rightarrow S1S2\,/Rg) + P\,(S2 \leftrightarrow S1)$$

Dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique du système de solides S1S2	=	Puissance des forces extérieures au système	Puissance des forces intérieures au système

Ce théorème peut aussi se décliner sous ses autres formes :

Si toutes les puissances (puissance des forces extérieures au système et puissance des forces intérieures au système) dérivent d'un potentiel, le système est dit conservatif, et :

$d[Ec(S1 \cup S2/Rg)]/dt + d[Ep \rightarrow (S1 \cup S2/Rg)]/dt = 0$

ou :

$Ec(S1 \cup S2/Rg) + Ep \rightarrow (S1 \cup S2/Rg) = constante$

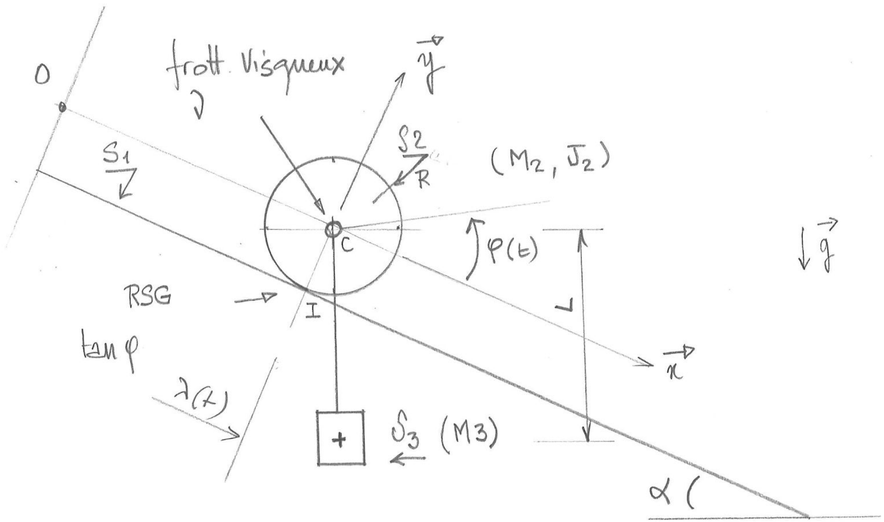
Sinon :

$d[Ec(S1 \cup S2/Rg)]/dt+d[Ep \rightarrow (S1 \cup S2/Rg)]/dt=P(\overline{S1S2}_{nc} \rightarrow S1 \cup S2/Rg)+P(S2 \leftrightarrow S1)$

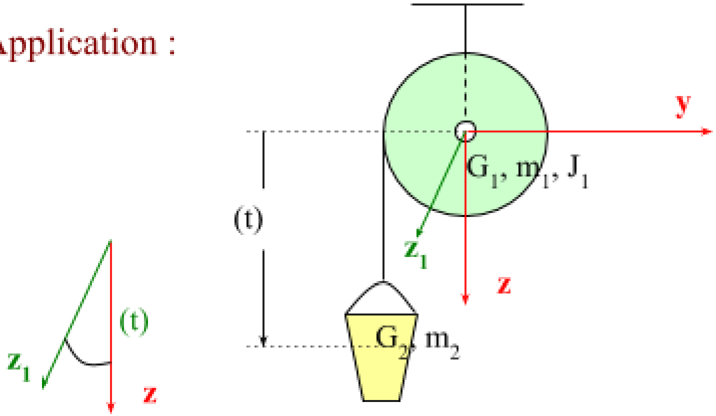
avec

$P(\overline{S1S2}_{nc} \rightarrow S1 \cup S2/Rg)$ Puissances des forces non conservatrices (ne dérivant pas d'un potentiel : moteur, frottement, …)

$P(S2 \leftrightarrow S1)$ Puissances des forces intérieures entre S1 et S2


O
frott. Visqueux
λ
$\vec{y}$
S1
S2
R
(M2, J2)
C
φ(t)
$\vec{g}$
RSG
I
tan φ
L
$\vec{x}$
λ(t)
S3 (M3)
α

Application :

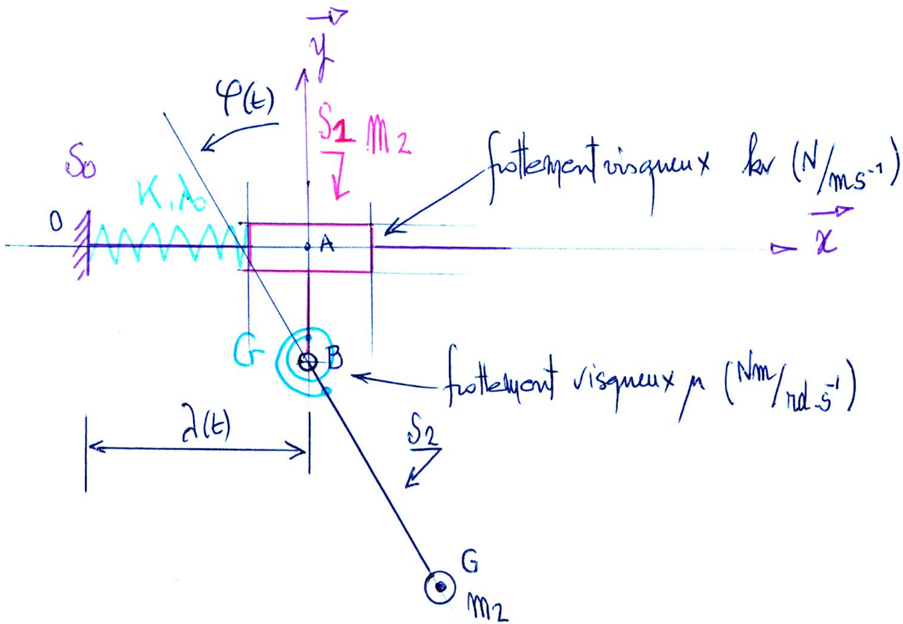


Une masse M en G_2, de masse m_2, est accrochée à l'aide d'un fil supposé sans masse, inextensible, de rayon négligeable, à un tambour B, de rayon R et d'inertie J_1. Déterminer l'équation du mouvement des deux solides quand on laisse descendre sans vitesse initiale la masse M.

Application : Glissière et pendule (modélise un pont roulant)

On isole 1+2

Ec(S1/Rg)
Ec(S2/Rg)
Ep(pesanteur→S1)
Ep(pesanteur→S2)
Ep(ressort K→S1)
Ep(ressort Cr S1↔S2)
P(glissière →S1/Rg)
P(frott kv →S2/Rg)
P(frott μ S1↔S2)
P(pivot S1↔S2)



Ecrire l'équation différentielle régissant le système

Elements de correction :

$V\vec{G}/Rg = \lambda° \vec{x} + BG\,\phi°\,\vec{x2}$

2 Ec(1+2)/Rg=(m1+m2)$\lambda°^2$+m2 $BG^2\,\phi°^2$ + 2 BG $\lambda°\phi°\cos\phi$

d/dt Ec(1+2)/Rg = (m1+m2)$\lambda°\lambda°°$+m2 ($BG^2\,\phi°\phi°°$ + BG $\lambda°°\phi°\cos\phi$ + BG $\lambda°\phi°°\cos\phi$ - BG $\lambda°\phi°^2\sin\phi$)

Ep(pesanteur→1/Rg) = 0

Ep(pesanteur→2/Rg) = - (AB + BG $\cos\phi$) m2 g   d/dt = + m2 g BG $\phi°\cos\phi$

Ep(ressort K→1/Rg) = ½ K $(\lambda-\lambda o)^2$ d/dt = K $\lambda°(\lambda-\lambda o)$

Ep(resort Cr 1↔2) = ½ Cr $(\phi-\phi o)^2$ d/dt = Cr $\phi°(\phi-\phi o)$

P(glissière→1/Rg) = 0

P(frott visqueux→1/Rg) = - kv $\lambda°^2$

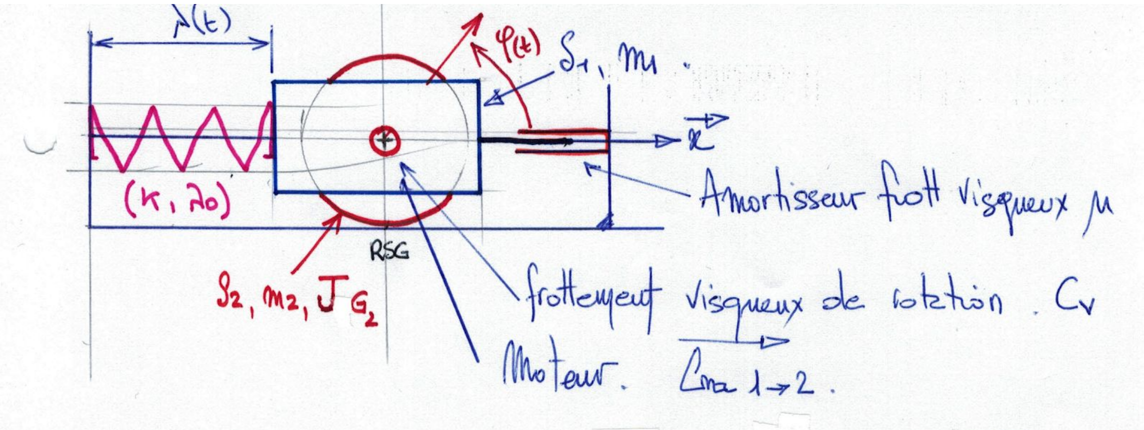
P(frott visqueux 1↔2) = - $\mu\,\phi°^2$

P(pivot 1↔2/Rg) = 0

Application : Positionnement d'une glissière par pignon crémaillère

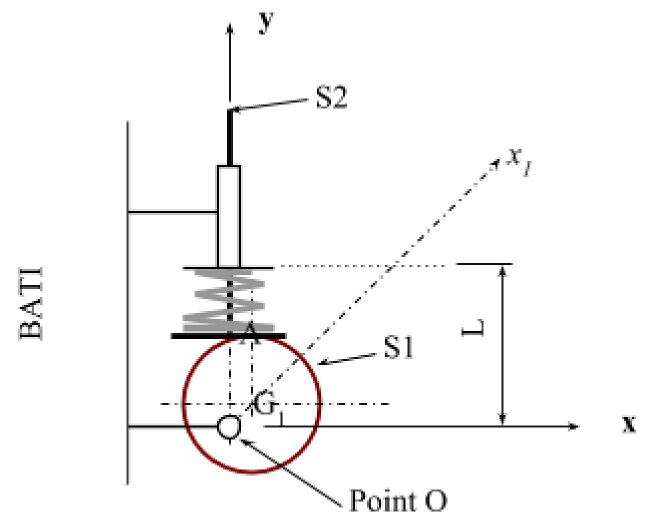
Un coulisseau S1 en liaison glissière avec le bâti
Un ressort de raideur K et de longueur à vide λo
Un amortisseur à frottement visqueux de coefficient μ ($N/m.s^{-1}$)
Une liaison pivot entre 1 et 2
Un frottement visqueux dans la liaison pivot de coefficient Cv ($N.m/rd.s^{-1}$)
Un moteur entre 1 et 2 délivre un couple moteur Cm
Une roue de masse m2, d'inertie JG2
2 roule sans glisser sur le bâti (pignon-crémaillère)

Quelle équation différentielle gère le paramètre $\lambda(t)$?



Applications :

Objectif : appliquer le théorème de l'énergie-puissance à un système constitué de plusieurs solides.



Le bâti est lié au repère O **x,y,z** galiléen sera noté Rg.
O $\mathbf{x_1},\mathbf{y_1},\mathbf{z}$ est lié à la came S_1.
La came est en liaison pivot **Oz** avec le bâti lié à O**xyz**.
L'angle (**x**, $\mathbf{x_1}$) est noté (t).
La soupape S_2 , de masse M, est en liaison glissière d'axe **Oy** avec le bâti. Un ressort , de masse négligeable, de raideur K maintient le contact en A entre S_1 et S_2.

La came, de masse et de moment d'inertie négligeables devant la masse de S_2, est circulaire de centre G_1 et de rayon r ; la distance OG_1 est notée e.
La cote selon **y** du point A, mesurée à partir de O, se notera $\lambda(t)$.
La distance fixe entre O et l'appui du ressort est notée L.
Tout le mécanisme est considéré plan.
Toutes les liaisons sont parfaites sauf en A : contact entre la came et la soupape considéré ponctuel ; le coefficient de frottement came/soupape sera noté f.

L'action de contact en A de S_1 sur S_2 sera notée $\mathbf{A1{\rightarrow}2} = XA_{12}\,\mathbf{x} + YA_{12}\,\mathbf{y}$
L'action de contact en A de S_2 sur S_1 sera notée $\mathbf{A2{\rightarrow}1} = XA_{21}\,\mathbf{x} + YA_{21}\,\mathbf{y}$

On pourra aussi noter $\mathbf{A1{\rightarrow}2}$ en fonction de $\mathbf{T_A}$ et $\mathbf{N_A}$. Préciser au cours du problème la notation utilisée.
La vitesse de rotation de la came, $\phi°$, est considérée constante (on étudie pas la phase transitoire d'accélération).
Le ressort n'est ni tendu ni comprimé au point bas de S2.
L'exercice consistera à

- déterminer le couple moteur $\mathbf{Cm} = N_O\,\mathbf{z}$

- Déterminer la vitesse de rotation $\phi°$ maxi pour qu'il y ait toujours contact en A (condition de non-décollement).

Freinage d'un véhicule

On modélise le problème dans le plan xOy. Un véhicule descend une route de pente α (=cte). L'essieu arrière freine.

- Le véhicule a une masse M.
- Les roues ont un rayon r, une masse et un moment d'inertie négligeables.
- Le vecteur unitaire x est orienté vers le bas de même direction que la route, O en haut de la pente.
- Le vecteur unitaire y est orienté vers le bas $\perp$ à x.
- La verticale descendante est portée par y_0.
- La pesanteur notée $g\ y_0$

Calculer :

- Faire le bilan des actions mécaniques qui s'exercent sur l'ensemble Σ.
- L'énergie cinétique de l'ensemble Ec(Σ/Ro)
- L'énergie potentielle de l'ensemble Ep(Σ/Ro)
- Calculer les puissances des forces non conservatives
- Calculer la puissance des forces intérieures
- En utilisant le théorème de l'énergie-puissance, écrire l'équation du mouvement de descente du véhicule
- Déterminer le couple de freinage si l'on veut une descente à vitesse constante.

Le Gyrobus est propulsé par un moteur électrique, dont l'énergie est fournie par une grande roue lancée à grande vitesse. Le moteur alimentant le volant de stockage d'énergie est réversible. Une fois le volant en acier de 1500 kg, lancé à 3000 tr/min, de diamètre 1,6m, le moteur se transforme en générateur électrique et alimente les moteurs permettant la propulsion du véhicule[1].

La recharge du volant s'effectue lors des montées et descentes des passagers, au moyen d'une perche placée sur le véhicule. Celle-ci prend de 30 secondes à 3 minutes, en fonction de la tension électrique appliquée aux bornes du moteur. Complètement chargé, un Gyrobus est autonome sur une distance de 6 km environ, à une vitesse d'environ 50-60 km/h., selon le type de véhicule et la charge de ces derniers. Le Gyrobus a été mis en service en 1953 à Gand, Kinshasa, Yverdon les Bains et Grandson.

<u>Avantages et inconvénients.</u>

+ Peu bruyant. Non polluant, hormis la production de l'électricité, fonctionne sans lignes de contact, les lignes peuvent facilement être modifiées. Un bus permettant de transporter 20 personnes a besoin d'un volant d'inertie pesant plus d'une tonne.

- Le volant, tournant à 3 000 tr/min, demande une protection particulière, car la vitesse du disque sur ses bords atteint 900 km/h. La conduite d'un Gyrobus est plus compliquée que celle d'un véhicule traditionnel, due au moment d'inertie du volant et au fait qu'il agit comme un gyroscope lors de changements de direction, ce qui donne une plus grande inertie au véhicule, il faut souvent attendre aux arrêts 3 ou 4 minutes pour la recharge du volant, ce qui diminue le niveau de service pour l'usager.

Source WIKIPEDIA.

Voir aussi les onduleurs à inertie (informatique, hôpitaux).

http://www.greenit.fr/article/materiel/volant-dinertie-190-kw-sans-plomb
http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89nergie_cin%C3%A9tique

On suppose les rendements égaux à 1 (sauf le bus).

- En considérant le volant d'inertie comme un cylindre plein, déterminer l'énergie cinétique stockée par le volant à 3000 tr/mn. Préciser l'unité.

Le bus (10,9 Tonnes) quitte son arrêt. Il a une phase d'accélération, passe de 0 à 40km/h en 20s, poursuit sa route sur 3 km, et a une phase de décélération naturelle et par freinage classique, équivalente en distance que la phase d'accélération. On estime le rendement global du bus à 65% (puissance utile de déplacement/puissance fournie).

- Calculer l'énergie cinétique du bus en fin d'accélération.
- Calculer le travail fourni au bus ?
- En déduire le travail perdu à cause du rendement.
- Evaluer la force résistante qui s'oppose au bus, que l'on suppose constante et indépendante de la vitesse du bus.
- Quel est le travail fourni au bus entre deux arrêts ?
- A quelle vitesse tourne le volant d'inertie en arrivant à l'arrêt suivant ?
- Calculer l'énergie cinétique à fournir pour le recharger.
- On estime qu'à l'arrêt le disque tourne à 1980 tr/mn. Si on veut que le volant se « recharge » en 4 minutes, déterminer le couple moteur nécessaire.
- Quelle durée de mise en service de l'accumulateur (arrêt à 3000 trs/mn)?

Solution

EC bus à l'arrêt = 0

EC bus après chargement de l'accumulateur

$\frac{1}{2}$ J ω^2 = 23 687 050 Joules

À la fin de l'accélération, le bus a une énergie cinétique de translation $\frac{1}{2}$ m v^2

EC = $\frac{1}{2}$ 10900* $(40000/3600)^2$ = Joules

En considérant un rendement de 0.65

Energie nécessaire pour amener le bus à 40km/h : 672839/0.65 = 1035137

On a donc perdu 362298 Joules, c'est le travail des forces résistantes que l'on modélise comme une force contraire

0 à 40 km en 20 s, accélération de 0.555 m/s²

Déplacement de 111 m

Force résistante = 362298/111 = 3260 N

Travail nécessaire pour maintenir le bus à vitesse constante

(4000-111-111)*3260 = 1335276 Joules

En tout on a dépensé en énergie cinétique, qu'on ne récupère pas par le freinage ici (on pourrait l'envisager) 1335276 + 1035137 = 14338414 Joules

L'énergie cinétique restante dans le rotor :

23 687 050 – 14338414 = 9298636 Joules

Ce qui correspond à une vitesse de rotation du rotor

1880 trs/mn

Pour recharger le disque en 4 mn :

$\omega 1$ = 197 rd/s, $\omega 2$ = 314 rd/s, accélération angulaire 0.489 rd/s²,

angle décrit durant cette phase

Variation d'énergie cinétique = travail des forces extérieures

Travail du couple = couple * angle décrit

Couple = 1022 Nm.

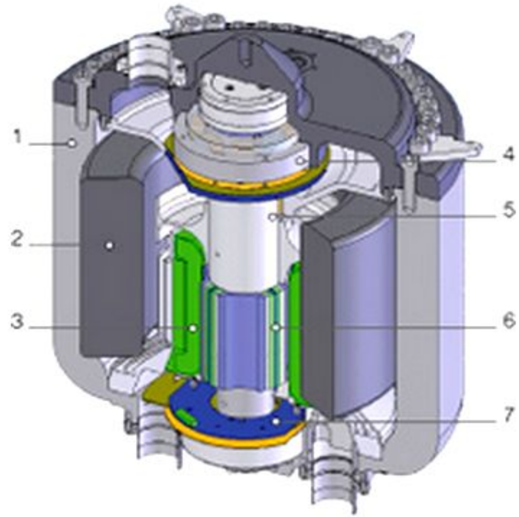
GYROBUS		Données		
masse du disque	kg	1500	kg	1500
rayon du disque	m	0,8	m	0,8
vitesse de rotation du disque	tr/mn	3000	rd/s	314,159265
durée de l'accélération du bus	s	20	s	20
vitesse atteinte à la fin de l'accélération	km/h	40	m/s	11,1111111
rendement bus energie utile/energie fournie		0,65		0,65
masse du bus PTAC	T	10,9	kg	10900
temps de recharge du disque	mn	4	s	240
distance entre deux arrets	km	4	m	4000
energie cinétique disque chargé			joules	23687050,6
energie cinétique du bus en fin d'accélération			joules	672839,506
travail fourni au bus			joules	1035137,7
travail perdu durant la phase d'accélération			joules	362298,196

accélération			m/s²	0,55555556
distance parcourue en phase d'accélération			m	111,111111
force résistante évaluée			N	3260,68376
travail fourni au bus entre deux arrêts			joules	13353276,4
énergie cinétique restante du disque			joules	9298636,51
vitesse du disque en fin de parcours	tr/mn	1879,64	rd/s	196,835766
énergie cinétique pour recharger			joules	14388414,1
accélération angulaire du disque			rd/s²	0,48884791
couple moteur pour recharger			N.m	1021,99006
durée de mise en service	mn	10,7109	s	642,65236
GYROBUS				

Les systèmes informatiques comportent des systèmes à inertie permettant une continuité dans la tension électrique. La minute de répit fournie par son onduleur à volant d'inertie suffit à démarrer les groupes électrogènes et les volants d'inertie nettoient parfaitement les signaux parasites du courant issu du réseau EDF. Ce courant de meilleure qualité préserve la durée de vie des serveurs.

Dans ce système le poids de la roue est de l'ordre de 450 kg et tourne entre 25000 et 60000 trs. Le système comporte une pompe à vide pour limiter l'échauffement.

Le rotor est guidé par lévitation magnétique pour annuler les frottements.



1. Boîtier
2. Volant d'inertie en fibre de carbone composite
3. Stator magnétique
4. Palier magnétique supérieur
5. Système de création du vide
6. Rotor
7. Palier magnétique inférieur

On se propose de rechercher l'équation de mouvement de la masse M, suspendue à un ressort (raideur K, longueur initiale $_0$). Ce ressort est lié à un coulisseau S2 mis en mouvement par un système bielle (S1)-cadre manivelle.

O point fixe, bâti galiléen

A centre de la liaison entre S1 et S2

y vertical ascendant, **x** horizontal gauche droite

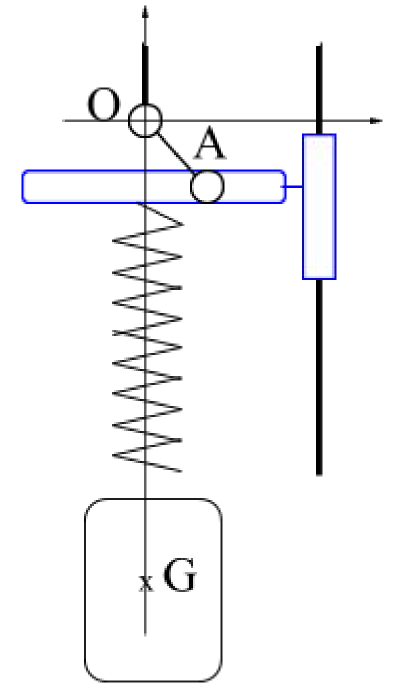
AO = e **y1**

L'angle yOy1 = (t)

La distance OG est variable et est notée (t)

La longueur du ressort est notée (t)

La masse du solide est notée m



(t)

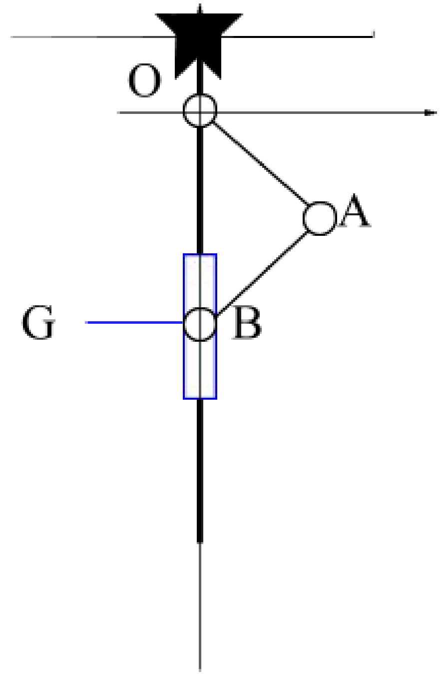
1. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'équation de mouvement de la masse m, en calculant les puissances de toutes les forces extérieures, conservatives ou non.

2. Peut-on utiliser l'énergie potentielle du ressort pour résoudre le problème ? Justifier.

Réponses :

1. Equation de mouvement : $m\,\mu^{\circ\circ} + K\,\mu = K\,\lambda_{\text{équilibre}} + K\,e\cos\phi$
2. On ne peut pas écrire l'énergie potentielle galiléenne du ressort
   a. On écrirait $\frac{1}{2}(\lambda-\lambda 0)^2$
   b. La dérivée donnerait $\lambda^{\circ}(\lambda-\lambda 0)$ alors que par les puissances on trouve $\mu^{\circ}(\lambda-\lambda 0)$

On se propose de rechercher l'équation de mouvement de la masse M en G.
O point fixe, bâti galiléen
OA solide S_1, masse m_1, inertie I_{G1z}
AB solide S_2, masse m_2, inertie I_{G2z}
A centre de la liaison pivot entre S1 et S2
B centre de la liaison glissière entre S2 et le bâti.
GB = b
Frottement visqueux de la liaison glissière de coefficient k.b : +/- k.b.° **y1**
y vertical ascendant, **x** horizontal gauche droite
AO = 2 a **y1**
BA = 2 a **y2**
OG = - **y2** – b **x1**
L'angle yOy1 = (t)
La distance OG st notée (t)
La longueur du ressort est notée (t)
Un ressort, de raideur K et de longueur à vide $_0$,
est placé entre O et B (non représenté).



http://grapheur.cours-de-math.eu/instructions.html