QUESTION DE COURS

1. Faire un schéma représentant un solide S, un repère R (O, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$), un point du solide A, un point du solide B, un point P, tous se déplaçant dans l'espace.

   Donner la définition des vecteurs position de A et P dans leur mouvement par rapport à R.

   Donner la définition des vecteurs vitesse de $A \in S$ et P dans leur mouvement par rapport à R.

2. On dit qu'un champ de vecteurs H est équiprojectif si $\mathbf{H(A)} = \mathbf{H(B)} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{R}$. Démontrer que le champ des vecteurs vitesse des points d'un solide est équiprojectif. (On dit aussi distribution des vecteurs vitesse des points d'un solide, ou transport des vitesses des points d'un solide). On considère le mouvement du solide S par rapport au repère R (O, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$), ainsi que les points $A \in S$ et $B \in S$. Qu'est ce que H et R ici ?

3. Dans le plan ($\mathbf{x_0}$O$\mathbf{y_0}$), on définit les vecteurs $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{y_1}$ unitaires tels que l'angle ($\mathbf{x_0}$O$\mathbf{x_1}$)= l'angle ($\mathbf{y_0}$O$\mathbf{y_1}$) = $\alpha(t)$. Ecrire le vecteur rotation $\mathbf{\Omega 1/0}$.

4. Ecrire $\mathbf{x_1}$ dans la base du repère 0.

5. Dériver alors ce vecteur écrit dans la base 0, par rapport au temps et pour un observateur lié à la base 0.

6. Montrer que cette dérivée s'écrit en fonction de $\mathbf{y_1}$

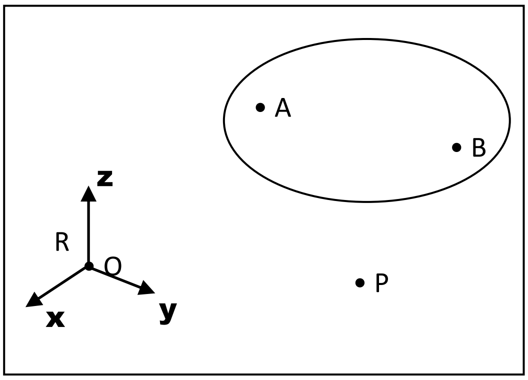
7. Quelle relation permet de dériver un vecteur unitaire en utilisant le produit vectoriel ?

8. Un pendule S est constitué d'une barre OA en liaison pivot en O selon $\mathbf{z_0}$. L'étude se fait donc dans le plan ($\mathbf{x_0}$O$\mathbf{y_0}$), $\mathbf{x_0}$ horizontal vers la droite, $\mathbf{y_0}$ vertical descendant. La barre OA porte le vecteur unitaire $\mathbf{x_1}$, fait un angle $\alpha(t)$ avec l'horizontale tel que $\alpha(t)$ = ($\mathbf{x_0}$O$\mathbf{x_1}$) = ($\mathbf{y_0}$O$\mathbf{y_1}$). Un point P se meut sur la barre et est retenu par un ressort accroché en O. La distance OP varie donc pendant le mouvement et est notée $\lambda(t)$.

   - Déterminer le vecteur position de $A \in S$ dans son mouvement par rapport à R_0.
   - Déterminer le vecteur vitesse de $A \in S$, dans son mouvement par rapport à R_0 , en utilisant l'outil dérivée du vecteur unitaire.
   - Déterminer le vecteur vitesse de $A \in S$, dans son mouvement par rapport à R_0, en utilisant l'outil transport des vitesses entre O et A.
   - Déterminer le vecteur vitesse de P dans son mouvement par rapport à R_0.
   - Déterminer le vecteur accélération de P dans son mouvement par rapport à R_0.

1. Faire un schéma représentant un solide S, un repère R (O, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$), un point du solide A, un point du solide B, un point P, tous se déplaçant dans l'espace.

Vecteur position de $A \in S$ dans son mouvement par rapport à R : $\mathbf{OA}$.
Vecteur position de P dans son mouvement par rapport à R : $\mathbf{OP}$.
O point fixe de R
$\mathbf{VA{\in}S/R} = [d\mathbf{OA}/dt]_R$
$\mathbf{VP/R} = [d\mathbf{OP}/dt]_R$



2. *Donner la définition des vecteurs position de A et P dans leur mouvement par rapport à R.*

3. *Donner la définition des vecteurs vitesse de $A \in S$ et P dans leur mouvement par rapport à R.*

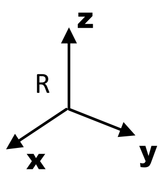
4. On dit qu'un champ de vecteurs H est équiprojectif si $\mathbf{H(A)} = \mathbf{H(B)} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{R}$. Démontrer que le champ des vecteurs vitesse des points d'un solide est équiprojectif. (On dit aussi distribution des vecteurs vitesse des points d'un solide, ou transport des vitesses des points d'un solide). On considère le mouvement du solide S par rapport au repère R (O, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$), ainsi que les points $A \in S$ et $B \in S$. Qu'est ce que H et R ici ?

Le champ de vecteurs ici est le champ des vecteurs vitesse des points du solide S. Il faut donc démontrer que $\mathbf{VA{\in}S/R} = \mathbf{VB{\in}S/R} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ qu'il faut définir.
$\mathbf{VA{\in}S/R} = [d\mathbf{OA}/dt]_R = [d(\mathbf{OB}+\mathbf{BA})/dt]_R = [d\mathbf{OB}/dt]_R + [d\mathbf{BA}/dt]_R$
$= \mathbf{VB{\in}S/R} + ([d\mathbf{BA}/dt]_S + \mathbf{\Omega S/R} \wedge \mathbf{BA}) = \mathbf{VB{\in}S/R} + \mathbf{0} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega S/R}$ (formule de BOUR)

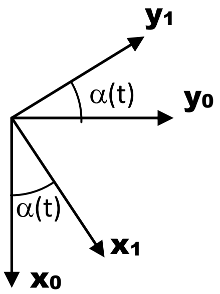
$$\mathbf{VA{\in}S/R} = \mathbf{VB{\in}S/R} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega S/R}$$

le champ des vecteurs vitesse des points du solide S est équiprojectif.
Rq : On dira que le torseur cinématique du solide S dans son mouvement par rapport à S s'écrit en A : $\{\mathbf{\Omega S/R} \,;\, \mathbf{VA{\in}S/R}\}$. en connaissant ces deux éléments, on connaît parfaitement le mouvement de tout le solide.

5. Dans le plan ($\mathbf{x_0}$O$\mathbf{y_0}$), on définit les vecteurs $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{y_1}$ unitaires tels que l'angle ($\mathbf{x_0}$O$\mathbf{x_1}$)= l'angle ($\mathbf{y_0}$O$\mathbf{y_1}$) = $\alpha(t)$. Ecrire le vecteur rotation $\mathbf{\Omega 1/0}$.



$\mathbf{\Omega 1/0} = \alpha°(t)\, \mathbf{z}$
$\mathbf{x_1} = \cos\alpha(t)\, \mathbf{x_0} + \sin\alpha(t)\, \mathbf{y_0}$
$[d\mathbf{x_1}/dt] = -\alpha°(t) \sin\alpha(t)\, \mathbf{x_0} + \alpha°(t) \cos\alpha(t)\, \mathbf{y_0}$
$[d\mathbf{x_1}/dt] = \alpha°(t)\, \mathbf{y_1}$
$[d\mathbf{x_1}/dt] = \mathbf{\Omega 1/0} \wedge \mathbf{x_1} = \alpha°(t) \mathbf{z} \wedge \mathbf{x_1} = \alpha°(t)\, \mathbf{y_1}$



6. Ecrire **x_1** dans la base du repère 0.

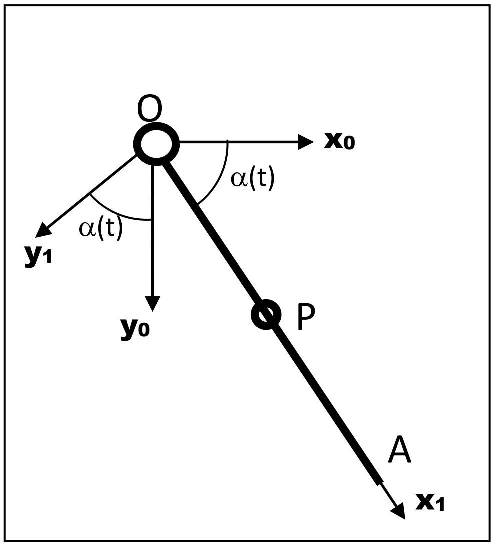
7. Dériver alors ce vecteur écrit dans la base 0, par rapport au temps et pour un observateur lié à la base 0.

8. Montrer que cette dérivée s'écrit en fonction de **y_1**

9. Quelle relation permet de dériver un vecteur unitaire en utilisant le produit vectoriel ?

   Voir ci-dessus.

10. Un pendule S est constitué d'une barre OA de longueur L, en liaison pivot en O selon **z_0**. L'étude se fait donc dans le plan (**x_0**O**y_0**), **x_0** horizontal vers la droite, **y_0** vertical descendant. La barre OA porte le vecteur unitaire **x_1**, fait un angle $\alpha(t)$ avec l'horizontale tel que $\alpha(t)$ = (**x_0**O**x_1**) = (**y_0**O**y_1**). Un point P se meut sur la barre et est retenu par un ressort accroché en O. La distance OP varie donc pendant le mouvement et est notée $\lambda(t)$.



Le vecteur position de A dans son mouvement par rapport à R_0 est **OA** = L **x_1**.

$V_{A\in S/R_0}$ = $[d\mathbf{OA}/dt]_{R0}$

$[d\mathbf{x_1}/dt]_{R0} = \mathbf{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \mathbf{x_1} = \alpha°(t)\mathbf{z_0}\wedge\mathbf{x_1} = \alpha°(t)\,\mathbf{y_1}$

$V_{A\in S/R_0}$ = $L\,\alpha°(t)\,\mathbf{y_1}$

$V_{A\in S/R_0}$ = **$V_{O\in S/R_0}$** + **$AO\wedge\Omega_{S/R_0}$**

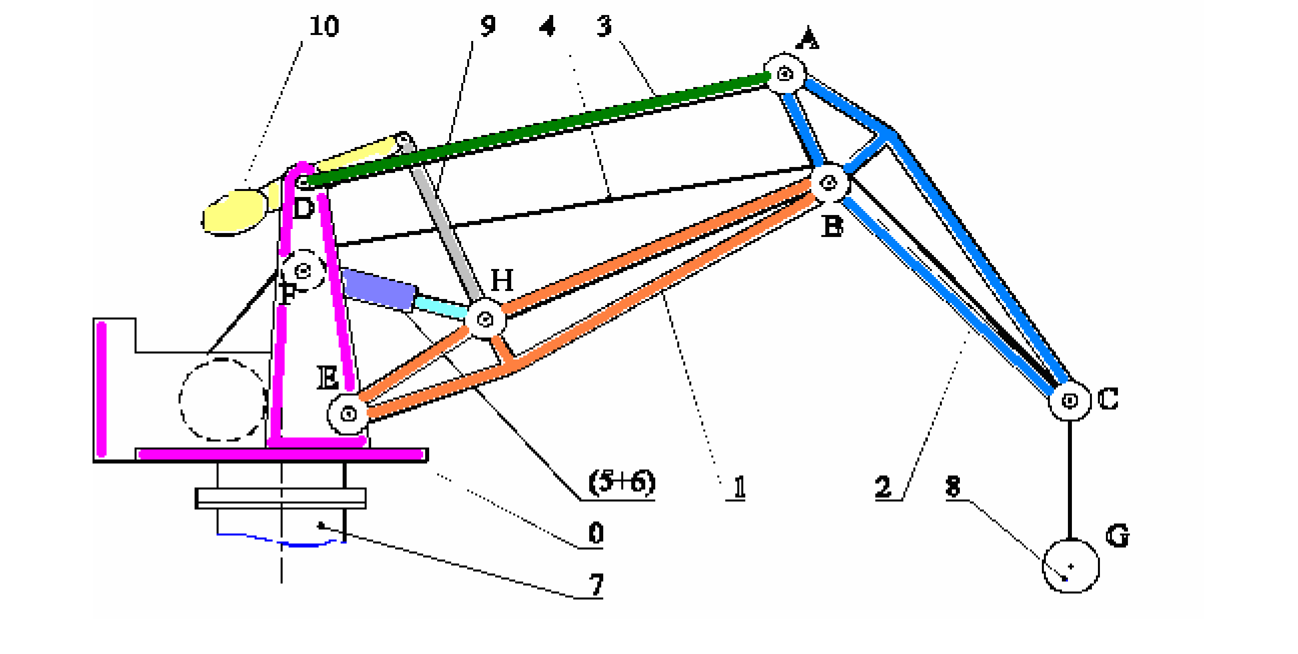
V_{P/R_0} = $\lambda°(t)\,\mathbf{x_1} + \lambda(t)\,\alpha°(t)\,\mathbf{y_1}$

$\mathbf{\Gamma_{P/R_0}} = \lambda°°(t)\,\mathbf{x_1} + \lambda(t)\,\alpha°°(t)\,\mathbf{y_1} - \lambda(t)\,\alpha°^2(t)\,\mathbf{x_1} + 2\,\lambda(t)\,\alpha°(t)\,\mathbf{y_1}$

on reconnaît l'accélération relative, l'accélération d'entraînement, enfin l'accélération de Coriolis

- Déterminer le vecteur position de A∈S dans son mouvement par rapport à R_0.
- Déterminer le vecteur vitesse de A∈S, dans son mouvement par rapport à R_0 , en utilisant l'outil dérivée du vecteur unitaire.
- Déterminer le vecteur vitesse de A∈S, dans son mouvement par rapport à R_0, en utilisant l'outil transport des vitesses entre O et A.
- Déterminer le vecteur vitesse de P dans son mouvement par rapport à R_0.
- Déterminer le vecteur accélération de P dans son mouvement par rapport à R_0.

GRUE PORTUAIRE



Présentation de la grue.

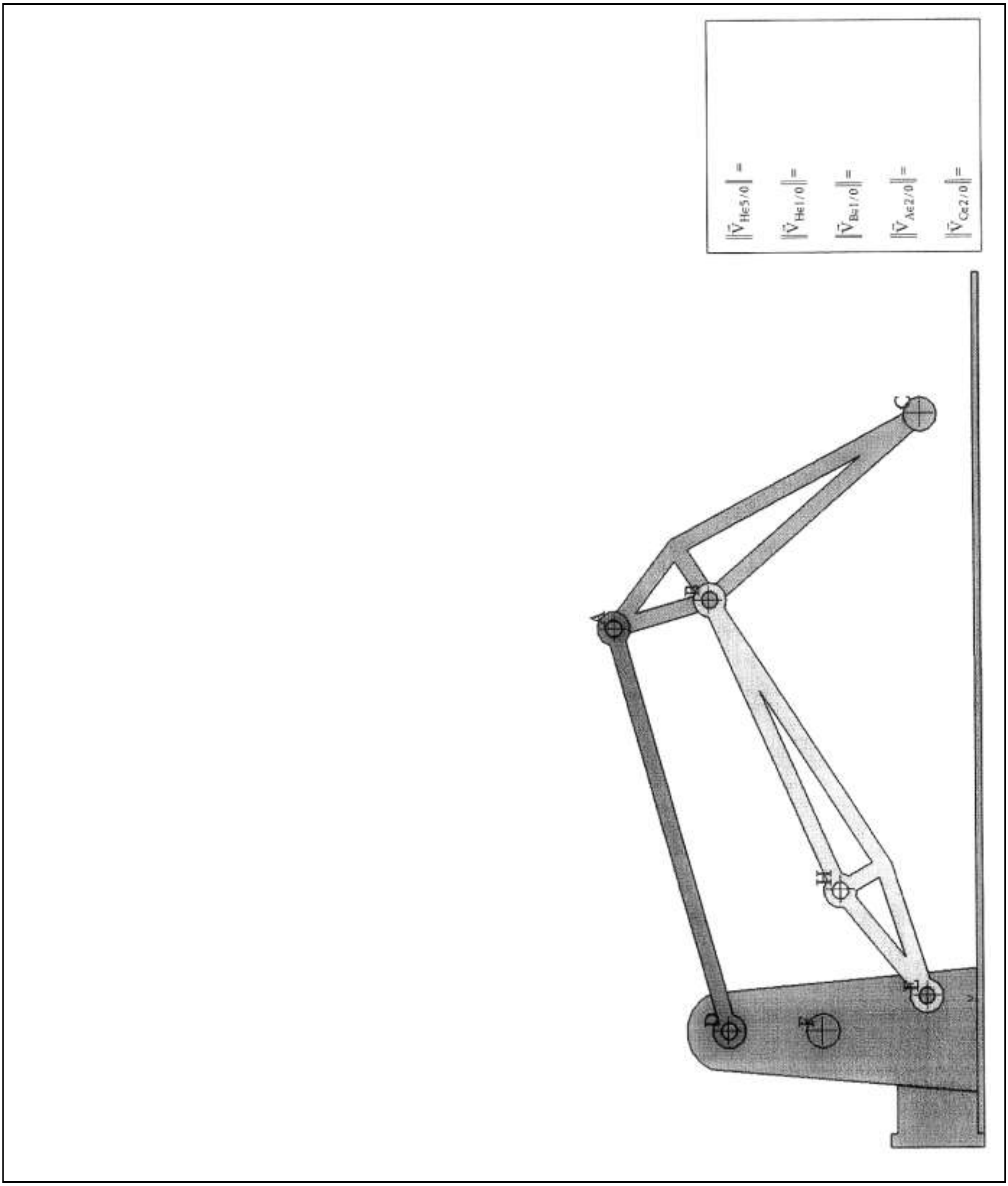
0. Tourelle
1. Flèche
2. Fléchette
3. Biellette
4. Câble
5. Corps de vérin
6. Tige de vérin
7. Bâti
8. Container
9. Biellette contre poids
10. Contre poids

1. Décrire le mouvement de la flèche 1 par rapport à la tourelle 0
2. Décrire le mouvement de la biellette 3 par rapport à la tourelle 0
3. Définir la trajectoire de $A \in 3/0$
4. Définir la trajectoire de $B \in 2/0$
5. Définir la trajectoire de $H \in 5/0$
6. Définir la trajectoire de $H \in 1/0$

On étudie le mouvement de repli, la fléchette 2 se rapprochant de la tourelle 0. La tige de vérin rentre avec une vitesse de 40 cm/s, défini par le débit d'huile.

7. Tracer sur le schéma le support des vitesses suivantes :
   a. $\mathbf{VH \in 5/6}$ support noté SH5/6
   b. $\mathbf{VH \in 1/0}$ support noté SH1/0
   c. $\mathbf{VH \in 5/0}$ support noté SH5/0
   d. $\mathbf{VB \in 1/0}$ support noté SB1/0
   e. $\mathbf{VA \in 3/0}$ support noté SA3/0

8. Tracer la vitesse **VH∈5/6** , vitesse de sortie de tige, en prenant comme échelle 1cm:20 cm/s
9. Ecrire la relation de composition des vecteurs vitesse comportant **VH∈5/6**, **VH∈5/0**, **VH∈6/0**. Déterminer graphiquement **VH∈6/0**.
10. En déduire graphiquement **VB∈1/0**.
11. Justifier que **VA∈3/0**= **VA∈2/0** et que **VB∈1/0**= **VB∈2/0**.
12. Tracer le centre instantané de rotation, noté $I_{2/0}$, durant le mouvement de la fléchette 2 par rapport à la tourelle 0.



CORRECTION GRUE PORTUAIRE

1. Décrire le mouvement de la flèche 1 par rapport à la tourelle 0
   Rotation autour de l'axe fixe en E
2. Décrire le mouvement de la biellette 3 par rapport à la tourelle 0
   Rotation autour de l'axe fixe en D
3. Définir la trajectoire de A∈3/0 cercle centre D rayon DA
4. Définir la trajectoire de B∈2/0 cercle centre E rayon EB
5. Définir la trajectoire de H∈5/0 cercle centre F rayon FH
6. Définir la trajectoire de H∈1/0 cercle centre E rayon EH

On étudie le mouvement de repli, la fléchette 2 se rapprochant de la tourelle 0. La tige de vérin rentre avec une vitesse de 40 cm/s, défini par le débit d'huile.

7. Tracer sur le schéma le support des vitesses suivantes :
   a. **VH∈5/6** support noté SH5/6
   b. **VH∈1/0** support noté SH1/0
   c. **VH∈5/0** support noté SH5/0
   d. **VB∈1/0** support noté SB1/0
   e. **VA∈3/0** support noté SA3/0
8. Tracer la vitesse **VH∈5/6** , vitesse de sortie de tige, en prenant comme échelle 1cm:20 cm/s
9. Ecrire la relation de composition des vecteurs vitesse comportant **VH∈5/6**, **VH∈5/0**, **VH∈6/0**. Déterminer graphiquement **VH∈6/0**.
10. En déduire graphiquement **VB∈1/0**.
11. Justifier que **VA∈3/0**= **VA∈2/0** et que **VB∈1/0**= **VB∈2/0**.
12. Tracer le centre instantané de rotation, noté $I_{2/0}$, durant le mouvement de la fléchette 2 par rapport à la tourelle 0.