En grec, CINEMA se traduit par MOUVEMENT. La cinématique est une partie de la mécanique rationnelle qui permet de décrire vectoriellement les mouvements des solides ou d'ensembles de solides.

- Les pré-requis sont les notions de calcul vectoriel vues en début de cycle.
- La cinématique est un pré-requis de la dynamique des solides et de l'énergétique, (la statique est un cas particulier de la dynamique des solides).

Le cours de cinématique suivra le plan suivant :

1. Cinématique du point, du point matériel.
2. Cinématique du solide, torseur cinématique.
3. Composition des vecteurs vitesse des points d'un solide.
4. Vitesse de glissement au contact entre deux solides

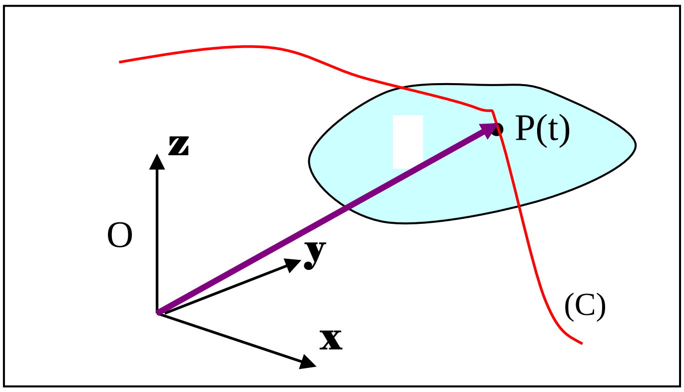
CHAPITRE 1 : Cinématique du point d'un solide, du point matériel.

1.1. Hypothèses :

- Dans les mouvements que nous étudierons, les vitesses seront très inférieures à la vitesse de la lumière ; nous resterons donc dans le cadre de la mécanique *newtonienne*, par opposition à la mécanique *relativiste*.
- L'espace est de dimension 3, on appellera *référentiel espace-temps* un *repère* de l'espace auquel sera adjoint une base de temps (unité seconde).

1.2. Vecteur position du point P

Le point P(t) considéré est un point matériel ou un point d'un solide. Il se meut dans un référentiel espace-temps : R(O, **x**, **y**, **z**), t est la variable qui mesure le temps.
La courbe (C), lieux de P(t) durant le mouvement, s'appelle la trajectoire.



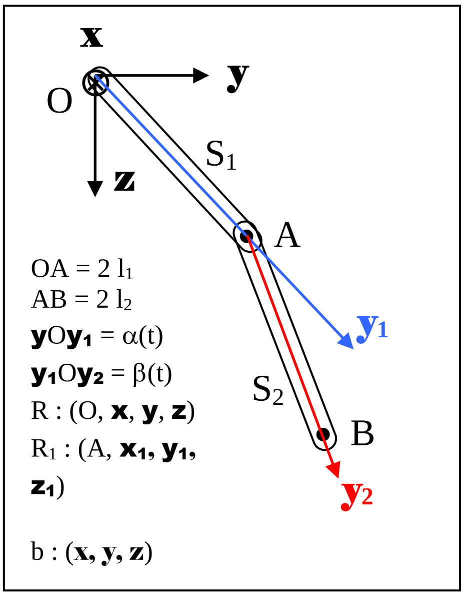
Définition :
OP(t) s'appelle le vecteur position du point P(t), dans le repère R (O, **x**, **y**, **z**), à la date t. Le vecteur position d'un point lie toujours **l'origine du repère** et le point.

Exemple :
Un double pendule est représenté ci-contre ; il est constitué d'un solide S_1 en liaison pivot (O, **x**) avec le bâti S_0, et d'un solide S_2 en liaison pivot (A, **x**) avec S_1. Le problème est plan.

Le comportement de ce double pendule est un problème de dynamique.

L'étude cinématique consistera à étudier les trajectoires, les vitesses et les accélérations des différents points.

OA est le vecteur position du point A dans le repère R.
OB est le vecteur position du point B dans le repère R.
AB est le vecteur position du point B dans le repère R_1 : (A, $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{z_1}$)



Le vecteur position **OB** peut s'écrire à l'aide des vecteurs directeurs $\mathbf{y_1}$ et $\mathbf{y_2}$:

$$\mathbf{OB} = 2\, l_1\, \mathbf{y_1} + 2\, l_2\, \mathbf{y_2}$$

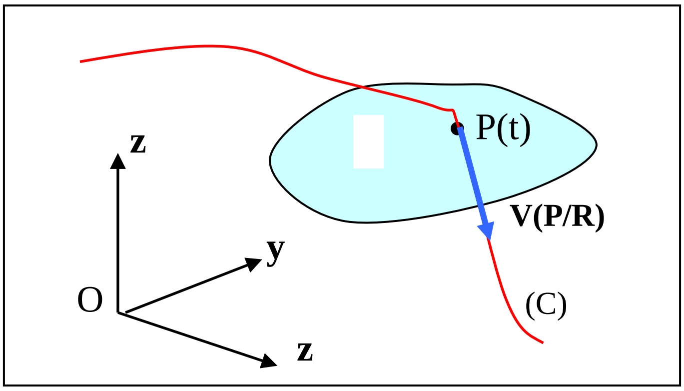
Ou dans une base orthonormée directe :

$$\mathbf{OB} = [\ 2\, l_1 \cos\alpha + 2\, l_2 \cos(\alpha+\beta)\ ]\ \mathbf{y} + [\ 2\, l_1 \sin\alpha + 2\, l_2 \sin(\alpha+\beta)\ ]\ \mathbf{z}$$

Quelle est l'écriture la plus simple ?

1.3. Vecteur vitesse du point P en mouvement dans le référentiel R

Le point P(t) considéré est un point matériel ou un point d'un solide.
Il se meut dans un référentiel espace-temps : R(O, **x, y, z**), t est la variable qui mesure le temps.



Définitions :

V(P/R) s'appelle le vecteur vitesse du point P(t), dans le repère R (O, **x, y, z**).
V(P/R) est la dérivée du vecteur position pour un observateur lié à R.

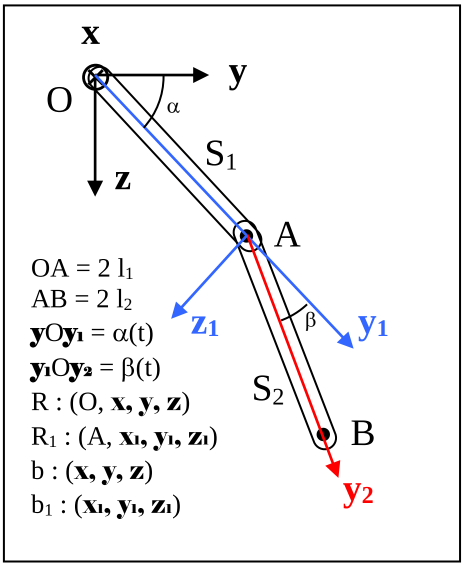
$$\mathbf{V}(P/R) = \left[\frac{d\,\mathbf{OP(t)}}{dt}\right]_R \quad \text{ou autre notation : } d_R\,\mathbf{OP(t)}/dt$$

V(P/R) est tangent en P à la trajectoire (C).

$\left[\dfrac{d}{dt}\right]_R$ ou d_R /dt est l'opérateur dérivation vectorielle.
On dérive un vecteur par rapport au temps pour un observateur lié à un repère.

Dans l'exemple du double pendule, on peut rechercher les trajectoires, les vitesses ou les accélérations des points pour un observateur lié à S_0. R est lié à S_0.

V(A/R) = **V(A/S$_0$)** vitesse du point A dans son mouvement par rapport à R ≡ S_0.



$\mathbf{OA} = 2\,l_1\,\mathbf{y_1} = [\,2\,l_1 \cos\alpha\,]\,\mathbf{y} + [\,2\,l_1 \sin\alpha\,]\,\mathbf{z}$

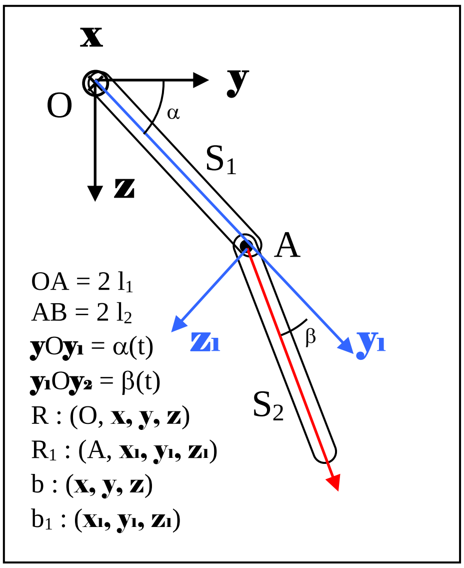
$[d\mathbf{OA}/dt]_R = -2\,l_1\,\alpha° \sin\alpha\,\mathbf{y} + 2\,l_1 \cos\alpha\,[d\mathbf{y}/dt]_R$
$\qquad + 2\,l_1\,\alpha° \cos\alpha\,\mathbf{z} + 2\,l_1 \sin\alpha\,[d\mathbf{z}/dt]_R$

$[d\mathbf{y}/dt]_R = [d\mathbf{z}/dt]_R = 0$ car **y** et **z** sont invariables (fixes) dans le repère R.

$[d\mathbf{OA}/dt]_R = -2\,l_1\,\alpha° \sin\alpha\,\mathbf{y} + 2\,l_1\,\alpha° \cos\alpha\,\mathbf{z}$
$[d\mathbf{OA}/dt]_R = 2\,l_1\,\alpha°\,\mathbf{z_1}$ car $\mathbf{z_1} = -\sin\alpha\,\mathbf{y} + \cos\alpha\,\mathbf{z}$

$\mathbf{V(A/R)} = 2\,l_1\,\alpha°\,\mathbf{z_1}$ Unités [L]/[t] (m/s)

Notions de dérivation vectorielle :



Rappelons le résultat de l'exercice précédent :

$\mathbf{OA} = 2\, l_1\, \mathbf{y_1} = [\, 2\, l_1 \cos\alpha]\, \mathbf{y} + [\, 2\, l_1 \sin\alpha]\, \mathbf{z}$

$[d\mathbf{OA}/dt]_R = -\, 2\, l_1\, \alpha°\, \sin\alpha\, \mathbf{y} + 2\, l_1\, \alpha°\, \cos\alpha\, \mathbf{z}$

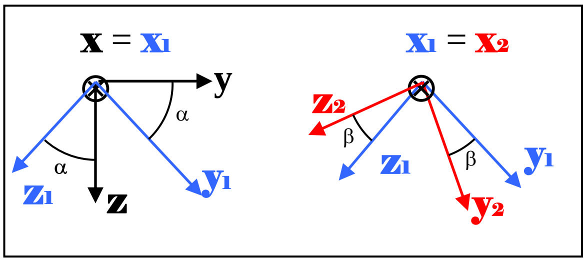
$[d\mathbf{OA}/dt]_R = 2\, l_1\, \alpha°\, \mathbf{z_1}$ car $\mathbf{z_1} = -\sin\alpha\, \mathbf{y} + \cos\alpha\, \mathbf{z}$

On remarque que $[d\mathbf{y_1}/dt]_R = \alpha°\, \mathbf{z_1}$

On pourrait calculer $[d\mathbf{z_1}/dt]_R = -\, \alpha°\, \mathbf{y_1}$

On pourrait calculer $[d\mathbf{x_1}/dt]_R = \mathbf{0}$

> **Définition :**
>
> Le vecteur $+\, \alpha°\, \mathbf{x_1}$ est noté $\mathbf{\Omega} R_1/R$, il s'appelle le vecteur rotation de R_1 par rapport à R. Il caractérise le changement d'orientation de R_1 par rapport à R.
>
> Le sens de $\mathbf{\Omega} R_1/R$ dépend du sens direct.



$[d\mathbf{y_1}/dt]_R = \alpha°\, \mathbf{x_1} \wedge \mathbf{y_1} = \mathbf{\Omega\, R_1/R} \wedge \mathbf{y_1} = \alpha°\, \mathbf{z_1}$

$[d\mathbf{z_1}/dt]_R = \alpha°\, \mathbf{x_1} \wedge \mathbf{z_1} = \mathbf{\Omega\, R_1/R} \wedge \mathbf{z_1} = -\, \alpha°\, \mathbf{y_1}$

$[d\mathbf{x_1}/dt]_R = \alpha°\, \mathbf{x_1} \wedge \mathbf{x_1} = \mathbf{\Omega\, R_1/R} \wedge \mathbf{x_1} = \mathbf{0}$

Calculons la dérivée $[d\mathbf{y_2}/dt]_R$

$\mathbf{y_2} = \cos\beta\, \mathbf{y_1} + \sin\beta\, \mathbf{z_1}$

$[d\mathbf{y_2}/dt]_R = -\, \beta°\, \sin\beta\, \mathbf{y_1} + \cos\beta\, \alpha°\, \mathbf{z_1} + \beta°\, \cos\beta\, \mathbf{z_1} + \sin\beta\, (-\, \alpha°\, \mathbf{y_1})$ **(uv'= u'v + uv')**

$-\, (\alpha°+\beta°)\, \sin\beta\, \mathbf{y_1} + (\alpha°+\beta°)\, \cos\beta\, \mathbf{z_1}$

$(\alpha°+\beta°)\, [-\, \sin\beta\, \mathbf{y_1} + \cos\beta\, \mathbf{z_1}]$

$[d\mathbf{y_2}/dt]_R = (\alpha°+\beta°)\, \mathbf{z_2}$ car $\mathbf{z_2} = [-\, \sin\beta\, \mathbf{y_1} + \cos\beta\, \mathbf{z_1}]$

$\mathbf{\Omega\, R_2/R} = (\alpha°+\beta°)\, \mathbf{x_1} = \alpha°\, \mathbf{x_1} + \beta°\, \mathbf{x_1} = \mathbf{\Omega\, R_2/R_1} + \mathbf{\Omega\, R_1/R}$

et $[d\mathbf{y_2}/dt]_R = (\alpha°+\beta°)\, \mathbf{x_1} \wedge \mathbf{y_2}$ car $\mathbf{x_1} \wedge \mathbf{y_2} = \mathbf{z_2}$

> On admet que la dérivation par rapport au temps pour un observateur lié à R d'un vecteur unitaire $\mathbf{k}$ appartenant à une base b_k est égal à :
>
> $$[d\mathbf{k}/dt]_R = \mathbf{\Omega}\, b_k/\mathbf{R} \wedge \mathbf{k}$$

Si un vecteur $\mathbf{U}$ s'écrit dans une base $b(\mathbf{x_i},\mathbf{y_i},\mathbf{z_i})$ $\mathbf{U} = q(t)\, \mathbf{x_i} + r(t)\, \mathbf{y_i} + s(t)\, \mathbf{z_i}$

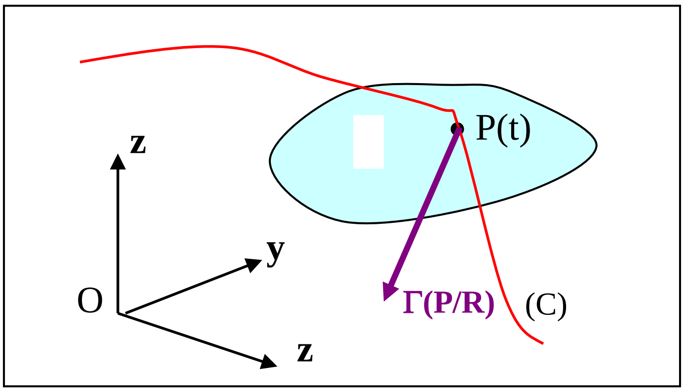
$[d\mathbf{U}/dt]_R = dq(t)/dt\, \mathbf{x_i} + q(t)[d\mathbf{x_i}/dt]_R + dr(t)/dt\, \mathbf{y_i} + r(t)[d\mathbf{y_i}/dt]_R + ds(t)/dt\, \mathbf{z_i} + s(t)[d\mathbf{z_i}/dt]_R$

$= dq(t)/dt\, \mathbf{x_i} + dr(t)/dt\, \mathbf{y_i} + ds(t)/dt\, \mathbf{z_i} + q(t)[d\mathbf{x_i}/dt]_R + r(t)[d\mathbf{y_i}/dt]_R + s(t)[d\mathbf{z_i}/dt]_R$

> **On admet** que la dérivation par rapport au temps pour un observateur lié à R d'un vecteur $\mathbf{U}$ qui s'exprime dans une base bi est égal à :
>
> $$[d\mathbf{U}/dt]_R = [d\mathbf{U}/dt]_{bi} + \mathbf{\Omega}\, b_i/\mathbf{R} \wedge \mathbf{U}$$
>
> **Appelée Formule de Bour**
>
> **Voir www.annales.org/archives/x/bour.html**

1.4. Vecteur accélération du point P en mouvement dans le référentiel R

Le point P(t) considéré est un point matériel ou un point d'un solide. Il se meut dans un référentiel espace-temps : R(O, **x, y, z**), t est la variable qui mesure le temps.



Définition :

Γ(P/R) s'appelle le vecteur accélération du point P(t), dans le repère R (O, **x, y, z**), à la date t.
Γ(P/R) est la dérivée du vecteur vitesse du point P pour un observateur lié à R.

$$\mathbf{\Gamma(P/R)} = \left[\frac{d\,\mathbf{VP/R}}{dt}\right]_R$$ ou autre notation : $d_R\,\mathbf{VP/R}/dt$

Γ(P/R) peut-être décomposée en deux accélérations :

- γ_t (accélération tangentielle) tangente en P à la trajectoire (C),
- γ_c (accélération centripète) normale (⊥) à la trajectoire et orientée vers le centre de cette trajectoire

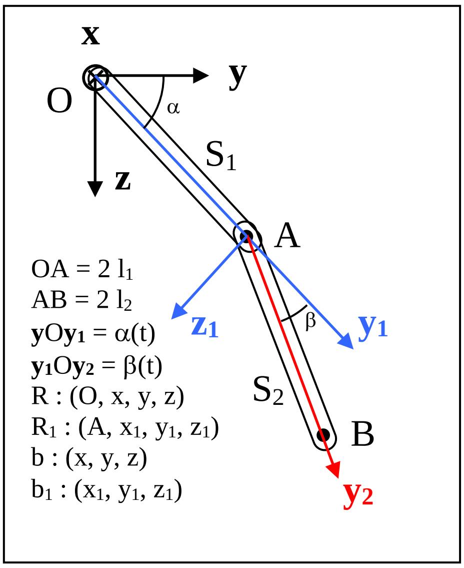
Dans l'exemple du double pendule, on peut rechercher les accélérations des points pour un observateur lié à S_0. R est lié à S_0.

Γ(A/R) = **Γ(A/S₀)** vitesse du point A dans son mouvement par rapport à R ≡ S_0.

$\mathbf{V(A/R)} = 2\,l_1\,\alpha°\,\mathbf{z_1}$
$\mathbf{\Gamma(A/R)} = [d\,\mathbf{V(A/R)}/dt]_R$

$\mathbf{\Gamma(A/R)} = 2\,l_1\,\alpha°°\,\mathbf{z_1} + 2\,l_1\,\alpha°\,\,[d\mathbf{z_1}/dt]_R$
$\mathbf{\Gamma(A/R)} = 2\,l_1\,\alpha°°\,\mathbf{z_1} + 2\,l_1\,\alpha°\,\,[-\,\alpha°\,\mathbf{x_1}] \wedge \mathbf{z_1}$

$\mathbf{\Gamma(A/R)} = 2\,l_1\,\alpha°°\,\mathbf{z_1} - 2\,l_1\,\alpha°^2\,\mathbf{y_1}$



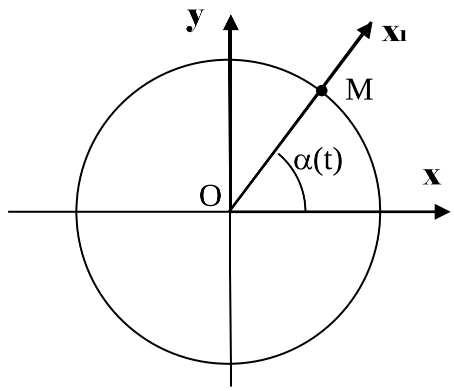
avec :

- γ_t (accélération tangentielle) = $2\,l_1\,\alpha°°\,\mathbf{z_1}$
- γ_c (accélération centripète) = $-\,2\,l_1\,\alpha°^2\,\mathbf{y_1}$ orienté vers l'intérieur de la trajectoire de A.

1.5. Applications

1.5.1. Trajectoire circulaire

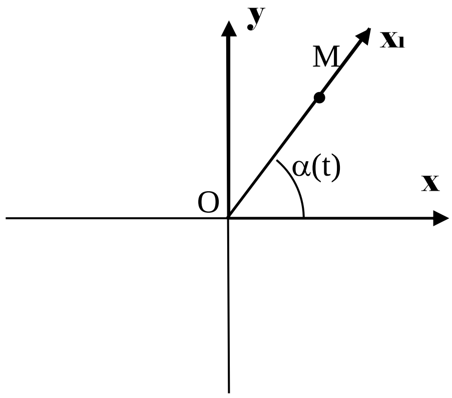
Le point M décrit une trajectoire circulaire de rayon constant a et de centre O.
Ecrire le vecteur position décrivant le mouvement du point M par rapport au repère R : (O, **x**, **y**, **z**)
Ecrire le vecteur vitesse décrivant le mouvement du point M par rapport au repère R : (O, **x**, **y**, **z**)
Ecrire le vecteur accélération décrivant le mouvement du point M par rapport au repère R : (O, **x**, **y**, **z**)



OM = R $\mathbf{x_1}$; **V(M/R)** = a $\alpha^{\circ}(t)$ $\mathbf{y_1}$; Γ**(M/R)** = a $\alpha^{\circ\circ}(t)$ $\mathbf{y_1}$ - a $\alpha^{\circ 2}(t)$ $\mathbf{x_1}$

1.5.2. Spirale

Le point M décrit une trajectoire de rayon a(t) et de centre O.
a = K. α(t), K = constante.
Ecrire le vecteur position décrivant le mouvement du point M par rapport au repère R : (O, **x**, **y**, **z**)
Ecrire le vecteur vitesse décrivant le mouvement du point M par rapport au repère R : (O, **x**, **y**, **z**)
Ecrire le vecteur accélération décrivant le mouvement du point M par rapport au repère R : (O, **x**, **y**, **z**)

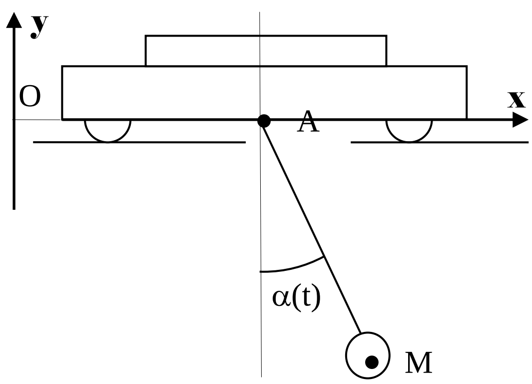


O

OM = K α $\mathbf{x_1}$; **V(M/R)** = K α° $\mathbf{x_1}$ + K α α° $\mathbf{y_1}$;
Γ**(M/R)** = K $\alpha^{\circ\circ}$ $\mathbf{x_1}$ + 2 K $\alpha^{\circ 2}$ $\mathbf{x_1}$ + K α $\alpha^{\circ\circ}$ $\mathbf{y_1}$ – Kα $\alpha^{\circ 2}$ $\mathbf{x_1}$

1.5.3. Pont roulant

Une charge M est accrochée à un pont roulant. Le déplacement du pont roulant entraîne le « pendulage » de la charge.
OA = $\mu(t)$ **x**
Ecrire le vecteur position décrivant le mouvement du point M par rapport au repère R : (O, **x**, **y**, **z**)
Ecrire le vecteur vitesse décrivant le mouvement du point M par rapport au repère R : (O, **x**, **y**, **z**)
Ecrire le vecteur accélération décrivant le mouvement du point M par rapport au repère R : (O, **x**, **y**, **z**)

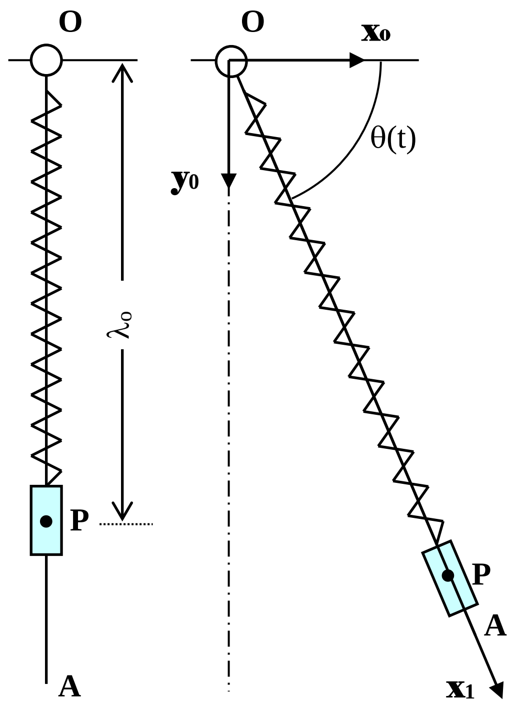


1.5.4. Truc à ressort

Un dispositif expérimental est représenté ci-contre :
Un pendule OA constitué d'une barre non pesante.
Un ressort de raideur K de longueur à vide λ_o
Une masse ponctuelle de masse m qui peut se déplacer sur la barre sans frottement.

Ecrire le vecteur position OP dans la base b_0
Ecrire le vecteur position OP dans la base b_1
Quelle est l'écriture la plus simple ?
A partir de la première expression, calculer le vecteur vitesse de P dans son mouvement par rapport au repère R_0 et retrouvez $\mathbf{V(P/R_0)} = (\lambda° \mathbf{x_1} + \lambda\ \theta°\ \mathbf{y_1})$.
A partir de la deuxième expression, calculer le vecteur vitesse de P dans son mouvement par rapport au repère R_0.
Quelle est la méthode la plus simple ?
Par la méthode la plus simple, déterminer le vecteur accélération de P dans son mouvement par rapport au repère R_0.

R_0 : (O, $\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}, \mathbf{z_0}$) b_0 : ($\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}, \mathbf{z_0}$)
R_1 : (O, $\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}, \mathbf{z_1}$) b_1 : ($\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}, \mathbf{z_1}$)



CHAPITRE 2 : Champ des vecteurs vitesse des points d'un solide

1. Notions de champ de vecteurs :

Soit un espace affine de dimension 3 : $\mathcal{E}$
Soit un espace vectoriel associé de dimension 3 : E

Une application de $\mathcal{E}$ dans E qui, à tout point P de l'espace affine fait correspondre le vecteur **H(P)**, vecteur de l'espace vectoriel associé, est appelée champ de vecteurs.

2. Champ de vecteurs équiprojectif :

Soit un espace affine de dimension 3 : $\mathcal{E}$
Soit un espace vectoriel associé de dimension 3 : E

Un champ de vecteur M qui, à tout point P de l'espace affine fait correspondre le vecteur **M(P)**, vecteur de l'espace vectoriel associé, et qui vérifie :

$$\forall P \in \mathcal{E}, \forall Q \in \mathcal{E}, \qquad \mathbf{M(P)} = \mathbf{M(Q)} + \mathbf{PQ} \wedge \mathbf{R}$$

est un champ de vecteurs équiprojectif.

R s'appelle la résultante générale, elle ne dépend pas du point.

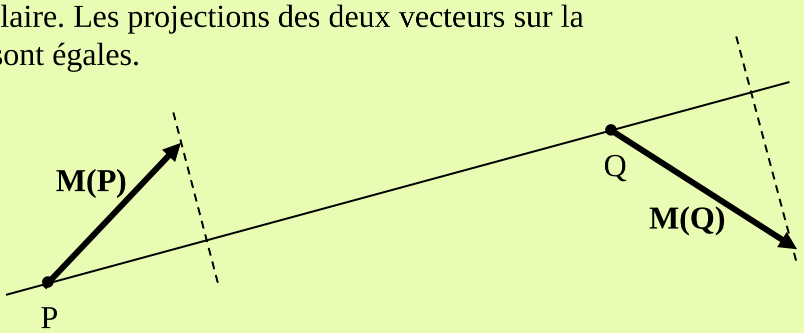
La relation d'équiprojectivité peut aussi s'écrire :

$\mathbf{M(P)} = \mathbf{M(Q)} + \mathbf{PQ} \wedge \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{M(P)} \bullet \mathbf{PQ} = \mathbf{M(Q)} \bullet \mathbf{PQ}$ facile à démontrer

On admettra $\quad \mathbf{M(P)} = \mathbf{M(Q)} + \mathbf{PQ} \wedge \mathbf{R} \Leftrightarrow \mathbf{M(P)} \bullet \mathbf{PQ} = \mathbf{M(Q)} \bullet \mathbf{PQ}$

Interprétation :

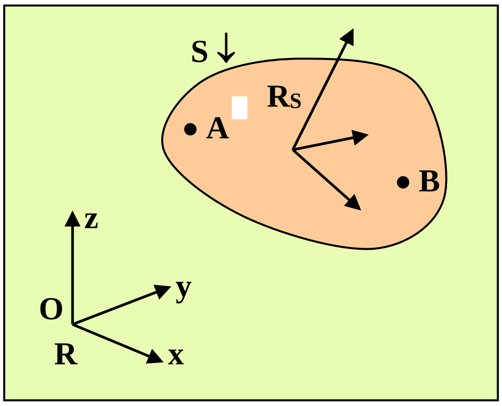
La projection orthogonale d'un vecteur sur une droite se traduit par le produit scalaire. Les projections des deux vecteurs sur la droite PQ sont égales.



3. <u>Champ des vecteurs vitesse des points d'un solide</u>

Soient :

Un solide S, <u>indéformable</u>, en mouvement dans un repère R.



Un espace affine de dimension 3 défini par le repère R_S lié au solide S. Les points A et B appartiennent au solide (fixes/solide), donc au repère R_S.

Un espace vectoriel associé de dimension 3, l'ensemble des vecteurs vitesse des points appartenant au solide S, ou par extension au repère R_S.

Le champ des vecteurs vitesse des points d'un solide définit :

en A le vecteur $\mathbf{V}_{\mathbf{A}\in\mathbf{S}/\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{V}_{\mathbf{A}\in\mathbf{R_S}/\mathbf{R}}$

en B le vecteur $\mathbf{V}_{\mathbf{B}\in\mathbf{S}/\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{V}_{\mathbf{B}\in\mathbf{R_S}/\mathbf{R}}$

On peut montrer que $\mathbf{V}_{\mathbf{A}\in\mathbf{S}/\mathbf{R}} \bullet \mathbf{AB} = \mathbf{V}_{\mathbf{B}\in\mathbf{S}/\mathbf{R}} \bullet \mathbf{AB}$ **(• se dit "scalaire")**

$$[d\mathbf{OB}/dt]_R \bullet \mathbf{AB} = [d(\mathbf{OA}+\mathbf{AB})/dt]_R \bullet \mathbf{AB}$$
$$= [d\mathbf{OA}/dt]_R \bullet \mathbf{AB} + [d\mathbf{AB}/dt]_R \bullet \mathbf{AB}$$
$$= [d\mathbf{OA}/dt]_R \bullet \mathbf{AB} + [d\mathbf{AB}/dt]_{R_S} \bullet \mathbf{AB} + (\mathbf{\Omega}\ \mathbf{R_S/R} \wedge \mathbf{AB}) \bullet \mathbf{AB}$$

or $A\in S$, $B\in S$ $\Rightarrow [d\mathbf{AB}/dt]_{R_S} = \mathbf{0}$ et $(\mathbf{\Omega}\ \mathbf{R_S/R} \wedge \mathbf{AB}) \bullet \mathbf{AB} = 0$

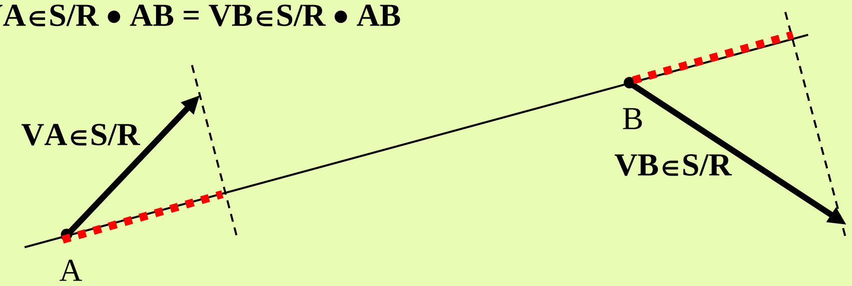
On peut montrer que $\mathbf{V}_{\mathbf{A}\in\mathbf{S}/\mathbf{R}} = \mathbf{V}_{\mathbf{B}\in\mathbf{S}/\mathbf{R}} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega}\ \mathbf{S/R}$

$$[d\mathbf{OA}/dt]_R = [d(\mathbf{OB}+\mathbf{BA})/dt]_R$$
$$= [d\mathbf{OB}/dt]_R + [d\mathbf{BA}/dt]_R$$
$$= [d\mathbf{OB}/dt]_R + [d\mathbf{BA}/dt]_{R_S} + \mathbf{\Omega}\ \mathbf{R_S/R} \wedge \mathbf{BA}$$
$$= [d\mathbf{OB}/dt]_R + [d\mathbf{BA}/dt]_{R_S} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega}\ \mathbf{R_S/R}$$

or $A\in S$, $B\in S$ $\Rightarrow [d\mathbf{BA}/dt]_{R_S} = \mathbf{0}$

Le champ des vecteurs vitesse des points d'un solide est équiprojectif .
Si un solide S est en mouvement par rapport à R_0, pour $A\in S$ et $B\in S$:

$$\mathbf{V}_{\mathbf{A}\in\mathbf{S}/\mathbf{R}} = \mathbf{V}_{\mathbf{B}\in\mathbf{S}/\mathbf{R}} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega}\ \mathbf{S/R}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{V}_{\mathbf{A}\in\mathbf{S}/\mathbf{R}} \bullet \mathbf{AB} = \mathbf{V}_{\mathbf{B}\in\mathbf{S}/\mathbf{R}} \bullet \mathbf{AB}$$



4. Torseur cinématique d'un solide en mouvement dans le repère R_0

Un champ de vecteurs M, qui à tout point P d'un espace affine fait correspondre un vecteur **M(P)** d'un espace vectoriel associé, et qui vérifie la relation d'équiprojectivité **M(P)** = **M(Q)** + **PQ** ∧ **R** forme un *torseur*.

Ce torseur s'écrit entre accolades { T } = { **R** ; M }

M s'appelle le moment du torseur.
R s'appelle la résultante du torseur.

On peut écrire le torseur en un point par ses éléments de réduction.

$\{ T \}_P = \{ \mathbf{R} ; \mathbf{M(P)} \}_P$

M vecteur moment en P du torseur.
R résultante du torseur.

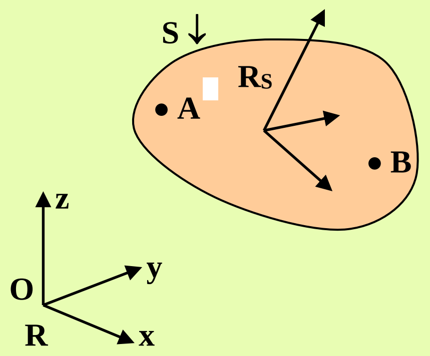
On retrouvera souvent dans le cours de mécanique cette notion de torseur : torseur des actions mécaniques d'un solide sur un autre, torseur cinématique d'un solide en mouvement, torseur des petits déplacements (fabrication mécanique), torseur cinétique (des quantités de vitesse), torseur dynamique (des quantités d'accélération) ; torseur des forces de cohésion (résistance des matériaux)...

Le champ des vecteurs vitesse des points d'un solide forme un torseur.
Soit le solide S en mouvement dans R_0 :
les éléments de réduction du torseur cinématique de S dans son mouvement dans R_0 s'écrit en A :

$\{ V\ S/R \}_A = \{ \mathbf{\Omega S/R} , \mathbf{VA{\in}S/R} \}_A$

et

$\mathbf{VA{\in}S/R} = \mathbf{VB{\in}S/R} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega\ S/R}$



5. <u>Axe central du torseur cinématique appelé aussi axe instantané de rotation</u>

<u>Définition :</u> On appelle axe central du torseur l'ensemble des points où les éléments de réduction **ΩS/R** et **VA∈S/R** sont colinéaires.

Par exemple, le torseur cinématique d'une vis en mouvement par rapport à l'écrou (dans un repère lié à l'écrou) présente comme axe central l'axe de la vis ; les points de cet axe ont un vecteur vitesse colinéaire au vecteur rotation.

Un solide S est en mouvement dans le repère R.
Les éléments de réduction du torseur cinématique de S dans son mouvement par rapport à R sont connus en B : **ΩS/R** et **VB∈S/R**.

Quel est le lieu des points A où **ΩS/R** et **VA∈S/R** sont colinéaires ?

Posons $\mathbf{\Omega S/R} \wedge \mathbf{VA{\in}S/R} = \mathbf{0}$ (ce qui traduit **ΩS/R** et **VA∈S/R** colinéaires.)

$$\mathbf{\Omega S/R} \wedge \mathbf{VA{\in}S/R} = \mathbf{\Omega S/R} \wedge (\mathbf{VB{\in}S/R} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega\ S/R}) = \mathbf{0}$$

> $\mathbf{U} \wedge (\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}) = \mathbf{U} \bullet \mathbf{W}\,.\,\mathbf{V} - \mathbf{U} \bullet \mathbf{V}\,.\,\mathbf{W}$
> double produit vectoriel
> ($\bullet \equiv$ produit scalaire)

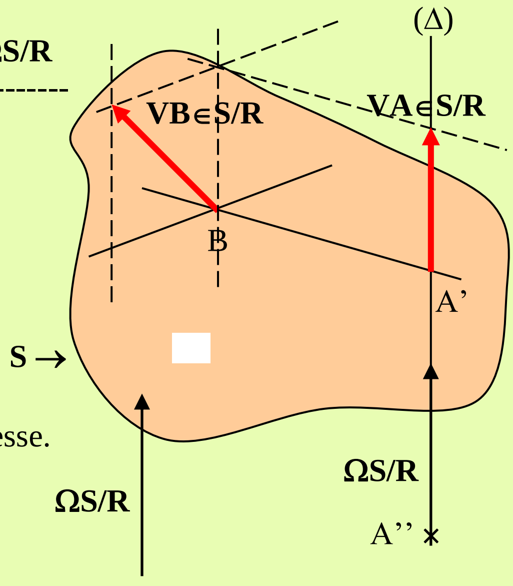
$$\Rightarrow \mathbf{\Omega S/R} \wedge \mathbf{VB{\in}S/R} + \mathbf{\Omega S/R} \wedge (\mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega S/R}) = \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow \mathbf{\Omega S/R} \wedge \mathbf{VB{\in}S/R} + \Omega^2 S/R\,.\,\mathbf{AB} - (\mathbf{\Omega S/R} \bullet \mathbf{AB}).\,\mathbf{\Omega S/R} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{AB} = \frac{\mathbf{VB{\in}S/R} \wedge \mathbf{\Omega S/R}}{\Omega^2 S/R} + \frac{(\mathbf{\Omega S/R} \bullet \mathbf{AB}).\,\mathbf{\Omega S/R}}{\Omega^2 S/R}$$

Pour un solide S, en mouvement dans un repère R, B∈S.
Le mouvement de ce solide est défini par les éléments de réduction en B de son torseur cinématique : { **ΩS/R** ; **VB∈S/R** }

Il existe des points appartenant au solide S ou au repère qui lui est lié R_S définis par la relation suivante :

$$\mathbf{AB} = \frac{\mathbf{VB{\in}S/R} \wedge \mathbf{\Omega S/R}}{\Omega^2 S/R} + \frac{(\mathbf{\Omega S/R} \bullet \mathbf{AB}).\,\mathbf{\Omega S/R}}{\Omega^2 S/R}$$

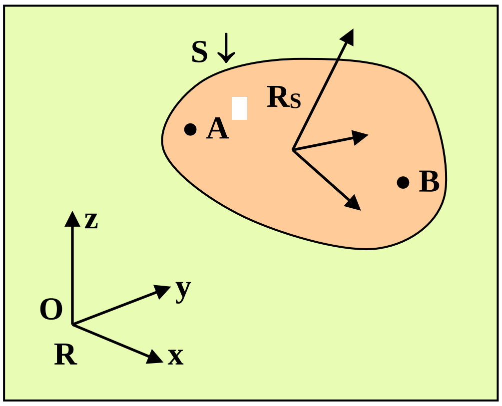


Soit la droite (Δ) = (A', **Ω S/R**)
A est quelque part sur la droite (Δ).
soit A'' ∈ (Δ)
$\mathbf{VA''{\in}S/R} = \mathbf{VA'{\in}S/R} + \mathbf{A''A'} \wedge \mathbf{\Omega\ S/R}$
$\mathbf{VA''{\in}S/R} = \mathbf{VA'{\in}S/R}$

Tout point de la droite (Δ) a même vecteur vitesse.

6. Champ des vecteurs accélération des points d'un solide

Soient :



Un solide S, indéformable, en mouvement dans un repère R.

Un espace affine de dimension 3 défini par le repère R_S lié au solide S. Les points A et B appartiennent au solide, donc au repère R_S.

Un espace vectoriel associé de dimension 3, l'ensemble des vecteurs accélération des points appartenant au solide S, ou par extension au repère R_S.

Le champ des vecteurs accélération des points d'un solide est défini par :
en A ce champ fait correspondre **ΓA∈S/R** ou **ΓA∈R$_S$/R**
en B ce champ fait correspondre **ΓB∈S/R** ou **ΓB∈R$_S$/R**

Peut-on montrer que **ΓA∈S/R • AB = ΓB∈S/R • AB ?**

$[d\mathbf{V}A\in S/R\ /dt]_R \bullet \mathbf{AB} = [d(\mathbf{V}B\in S/R + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega}\ S/R)\ /dt]_R \bullet \mathbf{AB}$
$= [d\ \mathbf{V}B\in S/R\ /dt]_R \bullet \mathbf{AB} + [d(\mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega}\ S/R)/dt]_R \bullet \mathbf{AB}$

$\mathbf{\Gamma}A\in S/R \bullet \mathbf{AB}$
$= \mathbf{\Gamma}B\in S/R \bullet \mathbf{AB} + [d\mathbf{AB}/dt]_R \wedge \mathbf{\Omega}\ S/R \bullet \mathbf{AB} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega}°S/R \bullet \mathbf{AB}$
$= \mathbf{\Gamma}B\in S/R \bullet \mathbf{AB} + ([d\mathbf{AB}/dt]_{Rs} + \mathbf{\Omega}Rs/R \wedge \mathbf{AB}) \wedge \mathbf{\Omega}S/R \bullet \mathbf{AB} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega}°S/R \bullet \mathbf{AB}$
$= \mathbf{\Gamma}B\in S/R \bullet \mathbf{AB} + (\mathbf{\Omega}Rs/R \wedge \mathbf{AB}) \wedge \mathbf{\Omega}S/R \bullet \mathbf{AB} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega}°S/R \bullet \mathbf{AB}$

Le champ des vecteurs accélération des points d'un solide n'est pas équiprojectif. Cette relation est sans intérêt.

Cherchons **ΓA∈S/R = ΓB∈S/R + ?**

$[d\mathbf{V}A\in S/R\ /dt]_R = [d(\mathbf{V}B\in S/R + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega}\ S/R)\ /dt]_R$
$= [d\mathbf{V}B\in S/R_0/dt]_R + [d(\mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega}\ S/R)/dt]_R$
$\mathbf{\Gamma}A\in S/R = \mathbf{\Gamma}B\in S/R + [d\mathbf{AB}/dt]_R \wedge \mathbf{\Omega}S/R + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega}°S/R$
$\mathbf{\Gamma}A\in S/R = \mathbf{\Gamma}B\in S/R + ([d\mathbf{AB}/dt]_{Rs} + \mathbf{\Omega}Rs/R \wedge \mathbf{AB}) \wedge \mathbf{\Omega}\ R_S/R + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega}°S/R$
$\mathbf{\Gamma}A\in S/R = \mathbf{\Gamma}B\in S/R + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega}°S/R + \mathbf{\Omega}Rs/R \wedge \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega}\ R_S/R$

Le champ des vecteurs accélération des points d'un solide en mouvement dans le repère R_0 n'est pas équiprojectif.

On peut néanmoins utiliser la relation suivante (qui n'est pas à retenir) pour A∈S, B∈S :

$\mathbf{\Gamma}A\in S/R = \mathbf{\Gamma}B\in S/R + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega}°S/R + (\mathbf{\Omega}S/R \wedge \mathbf{AB}) \wedge \mathbf{\Omega}\ S/R$

7. Paramétrage de la position d'un point, d'un solide dans l'espace.

Paramétrage d'un point :

La position d'un point dans l'espace est définie par au moins trois paramètres primitifs (coordonnées cartésiennes, cylindriques, polaires).

La position de n points est définie par au moins n x 3 paramètres primitifs.

Paramétrage d'un solide :

La position d'un solide dans l'espace est définie par au moins 6 paramètres primitifs :

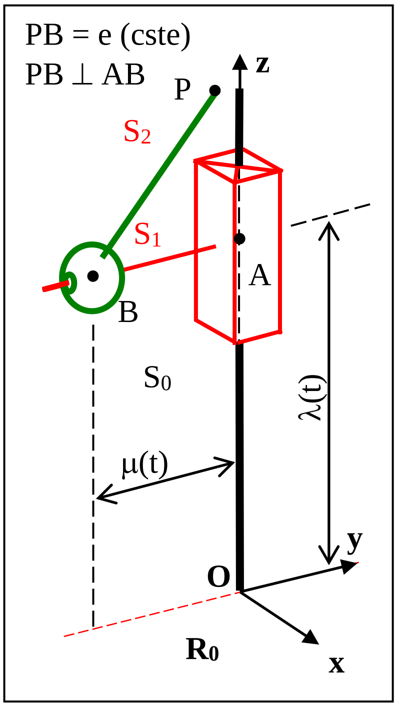
- 3 pour définir la position d'un point.
- 3 pour définir l'orientation du solide dans l'espace.

Toute relation algébrique entre les paramètres primitifs , leurs dérivées et le temps est appelée *liaison*.

Les paramètres ne pouvant pas être reliés aux autres par des liaisons sont appelés *paramètres indépendants*.

Le nombre de paramètres indépendants correspond au nombre de *mobilités* du solide ou du système de solides.

8. Exercice résolu :



Un système est composé de trois solides :

- un bâti S_0, R_0 lié à S_0.
- un solide S_1 en liaison glissière avec le bâti.
- un solide S_2 en liaison pivot glissant avec S_1.

<u>Paramétrage du solide S_1 /R_0 :</u>

Point A : x_A, y_A, z_A mais $x_A = y_A = 0\ \forall t$

Orientation de S_1 /R_0 : Rx, Ry, Rz nuls tous les trois.

Un seul paramètre indépendant : $z_A(t)$

<u>Paramétrage du solide S_2 /R_0 :</u>

Point B : x_B, y_B, z_B mais $x_B = 0\ \forall t$

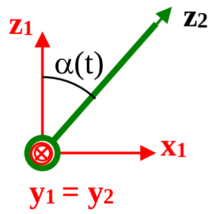
Orientation de S_2 / R_0 : Rx, Ry, Rz nuls avec Rx = Rz = 0

Trois paramètres indépendants : $z_B(t)$, $y_B(t)$, Ry(t).

<u>Paramétrage du système {S_1, S_2) /R_0 :</u> 3 ddl : $z_A(t) = z_B(t)$, $y_B(t)$, Ry(t).

<u>Torseur cinématique de S_2 dans son mouvement dans R_0 :</u>

C'est en B que le torseur est le plus simple à écrire.



$\{ V\ S_2/R_0 \}_B = \{ \mathbf{\Omega S/R}\, ,\ \mathbf{V B\in S_2/R_0} \}_B$

$\mathbf{\Omega S/R} = \alpha°\ y_1$
$\mathbf{V B\in S_2/R_0} = \lambda°(t)\ \mathbf{z} + \mu°(t)\ \mathbf{y_1}$

$\{ V\ S_2/R_0 \}_B = \{ \alpha°\ y_1,\ \lambda°(t)\ \mathbf{z} + \mu°(t)\ \mathbf{y_1} \}_B$

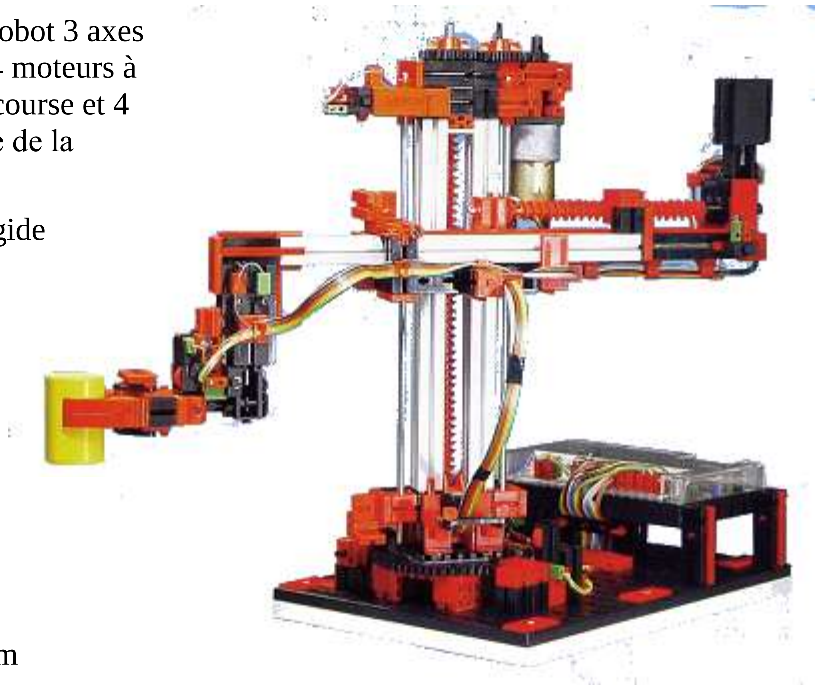
$\mathbf{V P\in S_2/R} = \mathbf{V B\in S_2/R} + \mathbf{PB} \wedge \mathbf{\Omega\ S_2/R}$
$\mathbf{V P\in S_2/R} = \lambda°(t)\ \mathbf{z} + \mu°(t)\ \mathbf{y_1} - e\ \mathbf{z_2} \wedge \alpha°\ \mathbf{y_1}$
$\mathbf{V P\in S_2/R} = \lambda°(t)\ \mathbf{z} + \mu°(t)\ \mathbf{y_1} + e\ \alpha°\ \mathbf{x_2}$

$\{ V\ S_2/R_0 \}_P = \{ \alpha°\ y_1,\ \lambda°(t)\ \mathbf{z} + \mu°(t)\ \mathbf{y_1} + e\ \alpha°\ \mathbf{x_2} \}_P$

Exercice : 3D – Robot Fischertechnik

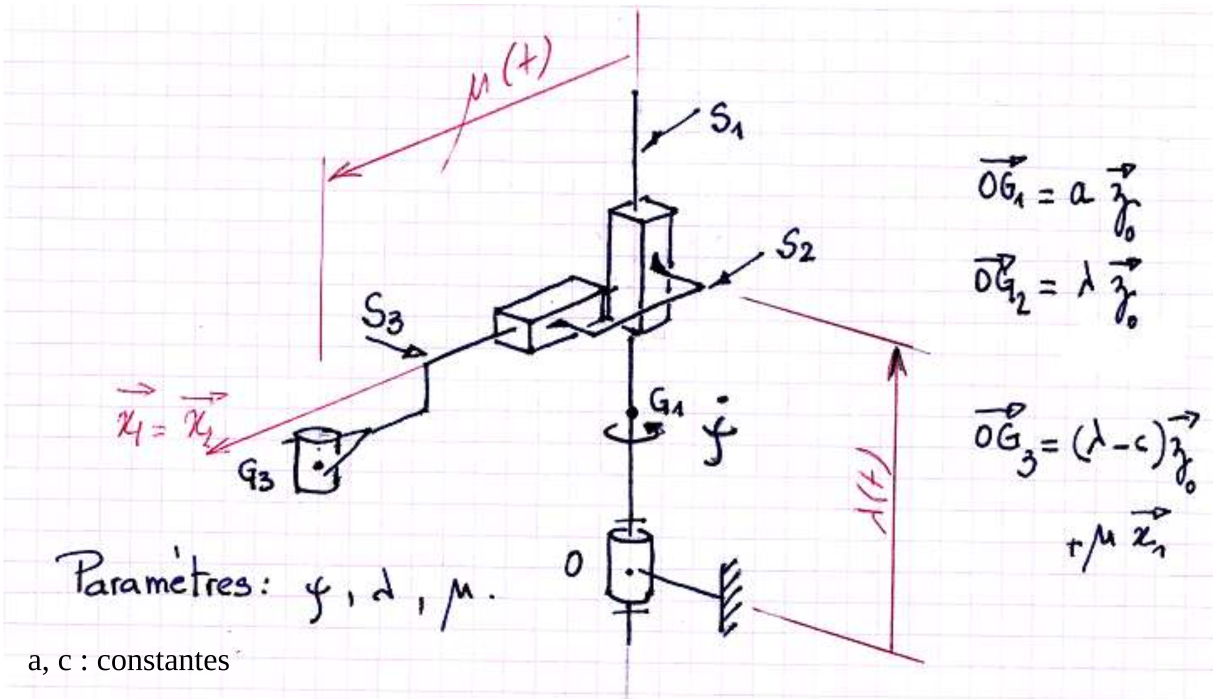
La gamme Fischertechnik propose un robot 3 axes avec pince manipulatrice, comportant 4 moteurs à courant continu, 4 interrupteurs fin de course et 4 compteurs d'impulsions pour la mesure de la course.

La maquette est montée sur un socle rigide en bois.



Dimensions 385 x 270 x 350 mm
Degré de liberté :
Axe 1 : rotation à 180°
Axe 2 : course avant arrière 100 mm
Axe 3 : course montée-descente 160 mm

Disponible en 9 VDC et 24 VDC
Equipements de série : Sans contrôleur, interface : cable nappe 24 brins connecteur mâle 26 broches.
Travail demandé : Modéliser et paramétrer le système.
Ecrire le torseur cinématique de chaque solide en son centre de masse.



a, c : constantes

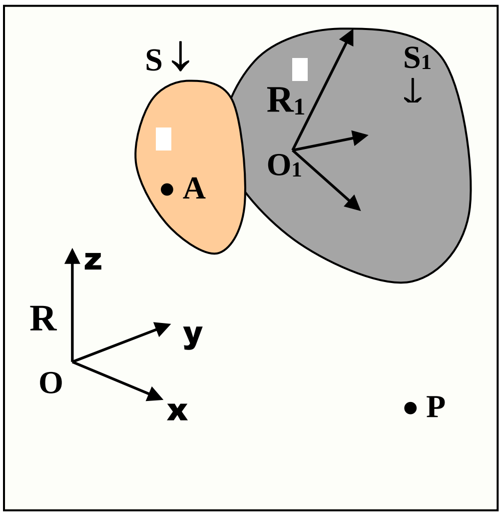
CHAPITRE 3 : Composition des vecteurs vitesse
Composition des vecteurs accélération

Mise en évidence :

On utilisera les relations de composition des vitesses quand un solide ou un point matériel se déplace de façon évidente (souvent translation rectiligne) par rapport à un autre solide donc on connaît le mouvement, par exemple un préhenseur en translation par rapport au bras du manipulateur.

Composition des vecteurs vitesse :

Soient :



Un solide S, indéformable.
Un point A du solide S.
Un repère R_1, en mouvement dans un repère R. Le solide S_1 est lié au repère Le solide S_1 est une restriction géométrique du repère R_1.
Un point P est en mouvement par rapport au solide S_1, donc par rapport au repère R_1.

Ecrivons la définition de la vitesse du point P dans son mouvement /R:

$\mathbf{VP/R} = {}^{(def)}[d\mathbf{OP}/dt]_R = {}^{(Chasles)}[d\mathbf{OO_1}/dt]_R + [d\mathbf{O_1P}/dt]_R$

$\mathbf{VP/R} = \mathbf{VO_1}/R + [d\mathbf{O_1P}/dt]_{R1} + \mathbf{\Omega\ R_1/R} \wedge \mathbf{O_1P}$ (Bour)

$\mathbf{VP/R} = \mathbf{VO_1}/R + \mathbf{PO_1} \wedge \mathbf{\Omega\ R_1/R} + [d\mathbf{O_1P}/dt]_{R1}$

$\mathbf{VP/R} = [d\mathbf{O_1P}/dt]_{R1} + \mathbf{VO_1 \in R_1}/R + \mathbf{PO_1} \wedge \mathbf{\Omega\ R_1/R}$ (équiprojectivité)

On démontre alors la relation de composition des vecteurs vitesse pour un point P qui se déplace dans R, pour un solide S_1 auquel est attaché le repère R_1 :
La vitesse du point P par rapport au repère R est égale à la vitesse du point P par rapport au repère R_1 plus la vitesse de P considéré fixe dans R_1 par rapport au repère R :

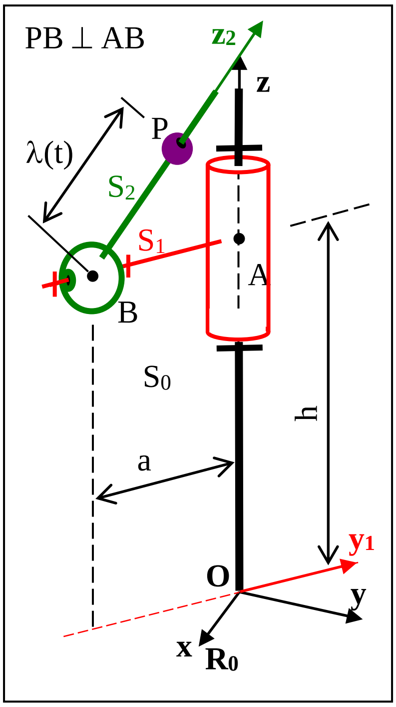
$$\mathbf{VP/R} = \mathbf{VP/R_1} + \mathbf{VP \in R_1/R}$$

Le second terme $\mathbf{VP \in R_1/R} = \mathbf{VO_1 \in R_1/R} + \mathbf{PO_1} \wedge \mathbf{\Omega\ R_1/R}$ est calculé à l'aide de la relation d'équiprojectivité à partir de la vitesse d'un point du solide ou repère R_1.

De même pour un point A d'un solide S :

$$\mathbf{VA \in S/R} = \mathbf{VA \in S/R_1} + \mathbf{VA \in R_1/R}$$

<u>Exemple d'application de la composition des vecteurs vitesse :</u>



Soient :
Un solide S_0 auquel est attaché le repère R_0.
Un solide S_1 auquel est attaché le repère R_1, en liaison pivot (A,**z**) avec S_0
Un solide S_2 auquel est attaché le repère R_2, en liaison pivot (B,y_1) avec S_1.
Un point matériel P se déplace sur S_2.

Paramétrage :
$\alpha(t) = (\mathbf{y}, \mathbf{y_1})$
$\theta(t) = (\mathbf{z}, \mathbf{z_2})$
$\lambda(t)\,\mathbf{z_2} = \mathbf{BP}$

Utilisons le relation de composition des vecteurs vitesse :

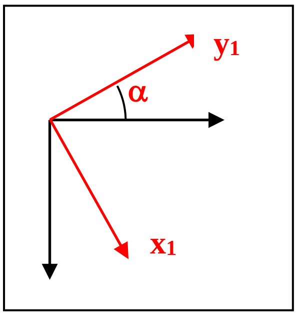
$\mathbf{VP/R_0} = \mathbf{VP/R_2} + \mathbf{VP{\in}R_2/\ R_0}$

$\mathbf{VP/R_0} = \lambda°(t)\,\mathbf{z_2} + \mathbf{VP{\in}R_2/\ R_0}$

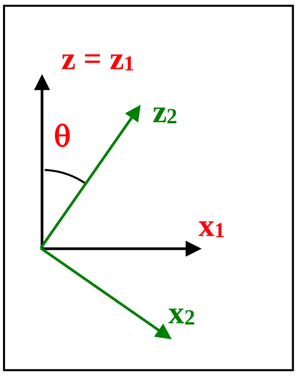
$\mathbf{VP{\in}R_2/\ R_0 = VB{\in}R_2/\ R_0 + PB \wedge \Omega\ R_2/\ R_0}$

$\mathbf{VP{\in}R_2/\ R_0} = \mathbf{a}\ \ \alpha°\,\mathbf{x_1} - \lambda\,\mathbf{z_2} \wedge (\ \alpha°\,\mathbf{z} + \theta°\,\mathbf{y_1})$
$= \mathbf{a}\ \ \alpha°\,\mathbf{x_1} + \lambda\,\alpha° \sin\theta\ \ \mathbf{y_1} + \lambda\,\theta°\,\mathbf{x_2}$

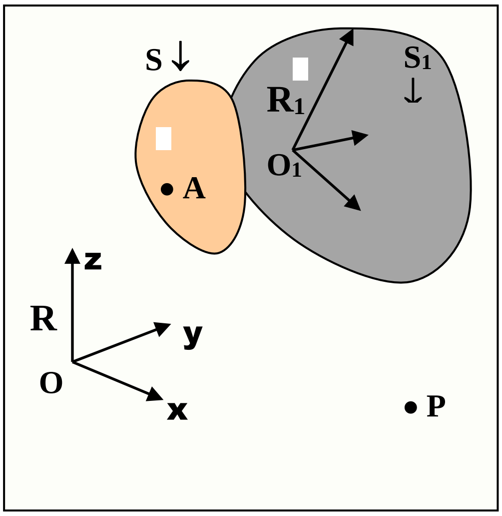
$\mathbf{VP/R_0} = \lambda°(t)\,\mathbf{z_2} + \mathbf{a}\ \ \alpha°\,\mathbf{x_1} + \lambda\,\alpha° \sin\theta\ \ \mathbf{y_1} + \lambda\,\theta°\,\mathbf{x_2}$



Le premier terme **VP/R₂** se déduit du schéma.
Le second terme se calcule par transport (équiprojectivité)



L'utilisation de la relation de composition des vecteurs vitesse nous permet de trouver le vecteur vitesse **VP/R₀** sans dériver.



Composition des vecteurs accélération :

Gardons le modèle du 2)

$\mathbf{VP/R} = \mathbf{VP/R_1} + \mathbf{VP{\in}R_1/R}$

Il ne faut surtout pas dériver telle quelle cette expression car $\mathbf{VP{\in}R_1/R}$ est calculée comme si P appartenait à R1 alors qu'en réalité il n'y appartient pas.
Il faut dériver l'expression qui nous a permit de démontrer la composition des vecteurs vitesse.

$\mathbf{VP/R} = \mathbf{VP/R_1} + \mathbf{VO_1{\in}R_1/R} + \mathbf{PO_1} \wedge \mathbf{\Omega\ R_1/R}$

Dérivons cette expression :

$\mathbf{\Gamma P/R} = [d\mathbf{VP/R_1}]_R + \mathbf{\Gamma O_1/R} + \mathbf{PO_1} \wedge [d\mathbf{\Omega\ R_1/R}]_R + [d\ \mathbf{PO_1}] \wedge \mathbf{\Omega\ R_1/R}$

$\mathbf{\Gamma P/R} = [d\mathbf{VP/R_1}]_{R1} + \mathbf{\Omega\ R_1/R} \wedge \mathbf{VP/R_1} + \mathbf{\Gamma O_1/R} + \mathbf{PO_1} \wedge [d\mathbf{\Omega\ R_1/R}]_R + [d\ \mathbf{PO_1}]_R \wedge \mathbf{\Omega\ R_1/R}$

Or le cours précédent nous a permit d'écrire :

(1) $\mathbf{\Gamma A{\in}S/R} = \mathbf{\Gamma B{\in}S/R} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega°S/R} + (\mathbf{\Omega S/R} \wedge \mathbf{AB}) \wedge \mathbf{\Omega\ S/R}$

d'où $\mathbf{\Gamma P{\in}R_1/R} = \mathbf{\Gamma O_1{\in}R_1/R} + \mathbf{PO_1} \wedge \mathbf{\Omega°R_1/R} + (\mathbf{\Omega R_1/R} \wedge \mathbf{PO_1}) \wedge \mathbf{\Omega\ R_1/R}$

La relation précédente s'écrit alors :

$\mathbf{\Gamma P/R} = [d\mathbf{VP/R_1}]_{R1} + \mathbf{\Omega\ R_1/R} \wedge \mathbf{VP/R_1} + \mathbf{\Gamma O_1/R} + \mathbf{PO_1} \wedge [d\mathbf{\Omega\ R_1/R}]_R$
$+ ([d\ \mathbf{PO_1}]_{R1} + \mathbf{\Omega\ R_1/R} \wedge \mathbf{PO_1}) \wedge \mathbf{\Omega\ R_1/R}$

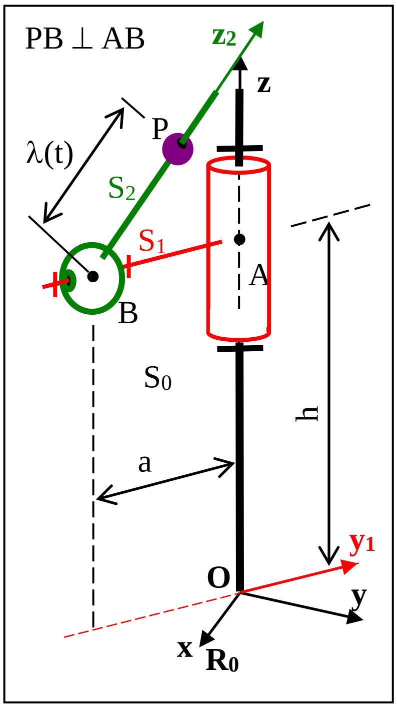
$\mathbf{\Gamma P/R} = [d\mathbf{VP/R_1}]_{R1} + \mathbf{\Omega\ R_1/R} \wedge \mathbf{VP/R_1} + \mathbf{\Gamma O_1/R} + \mathbf{PO_1} \wedge [d\mathbf{\Omega\ R_1/R}]_R$
$+ [d\ \mathbf{PO_1}]_{R1} \wedge \mathbf{\Omega\ R_1/R} + (\mathbf{\Omega\ R_1/R} \wedge \mathbf{PO_1}) \wedge \mathbf{\Omega\ R_1/R}$

On démontre alors la relation de composition des vecteurs accélération pour un point P qui se déplace dans R, pour un solide S_1 auquel est attaché le repère R_1 :
L'accélération du point P par rapport au repère R est égale à la l'accélération du point P par rapport au repère R_1 plus l'accélération de P considéré fixe dans R_1 par rapport au repère R :

$$\mathbf{\Gamma P/R} = \mathbf{\Gamma P/R_1} + \mathbf{\Gamma P{\in}R_1/R} + 2\ \mathbf{\Omega\ R_1/R} \wedge \mathbf{VP/R_1}$$

Le premier terme $\mathbf{\Gamma P/R_1}$ est appelé accélération relative.
Le second terme $\mathbf{\Gamma P{\in}R_1/R}$ est appelé accélération d'entraînement et peut-être calculé à l'aide de la relation (1).
Le troisième terme : 2 $\mathbf{\Omega\ R_1/R} \wedge \mathbf{VP/R_1}$ s'appelle l'accélération de Coriolis.

Exemple d'application de la composition des vecteurs accélération :

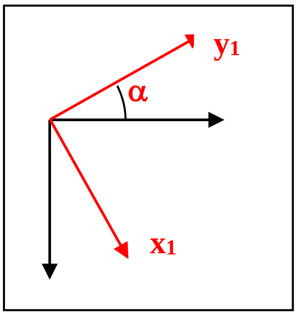


Soient :
Un solide S_0 auquel est attaché le repère R_0.
Un solide S_1 auquel est attaché le repère R_1, en liaison pivot $(A,\mathbf{z})$ avec S_0
Un solide S_2 auquel est attaché le repère R_2, en liaison pivot $(B,\mathbf{y_1})$ avec S_1.
Un point matériel P se déplace sur S_2.

Paramétrage :
$\alpha(t) = (\mathbf{y}, \mathbf{y_1})$
$\theta(t) = (\mathbf{z}, \mathbf{z_2})$
$\lambda(t)\, \mathbf{z_2} = \mathbf{BP}$

La relation de composition des vecteurs vitesse nous donne :

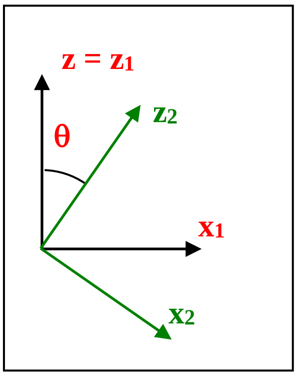
$\mathbf{VP/R_0} = \mathbf{VP/R_2} + \mathbf{VP{\in}R_2/\ R_0}$
$\mathbf{VP/R_2} = \lambda°(t)\, \mathbf{z_2}$
$\mathbf{VP{\in}R_2/\ R_0} = \mathbf{a}\ \alpha°\ \mathbf{x_1} + \lambda\ \alpha° \sin\theta\ \mathbf{y_1} + \lambda\ \theta°\ \mathbf{x_2}$



La relation de composition des vecteurs accélération des points d'un solide s'écrit :

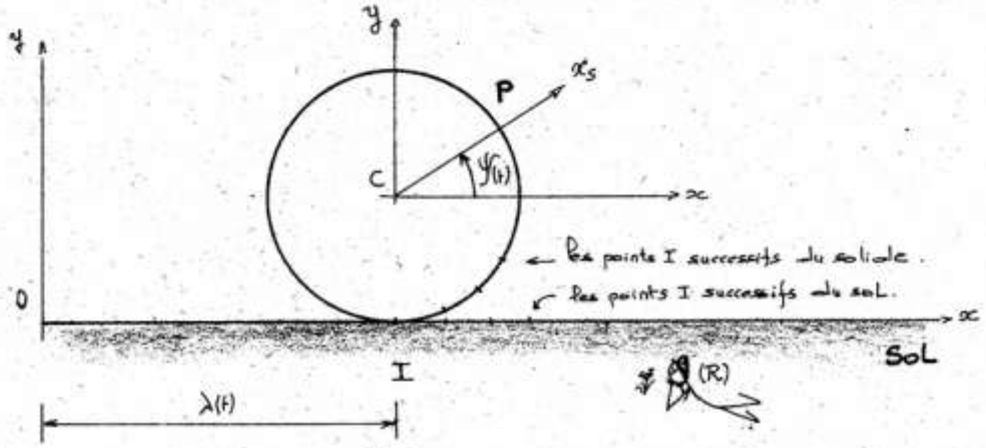
$\mathbf{\Gamma P/R_0} = \mathbf{\Gamma P/R_2} + \mathbf{\Gamma P{\in}R_2/R_0} + 2\ \mathbf{\Omega\ R_2/R_0} \wedge \mathbf{VP/R_2}$

$\mathbf{\Gamma P/R_2} = \lambda°°\ \mathbf{z_2}$
$2\ \mathbf{\Omega\ R_2/R_0} \wedge \mathbf{VP/R_2} = \mathbf{2}\ (\ \alpha°\ \mathbf{z} + \theta°\ \mathbf{y_1}) \wedge \lambda°(t)\ \mathbf{z_2}$
$\mathbf{\Gamma P{\in}R_2/R_0} =$



CHAPITRE 4 : Roulement sans glissement – vitesse de glissement loi d'entrée sortie

I : Position du problème



Pour un observateur lié au sol (R), on peut considérer 3 points I.

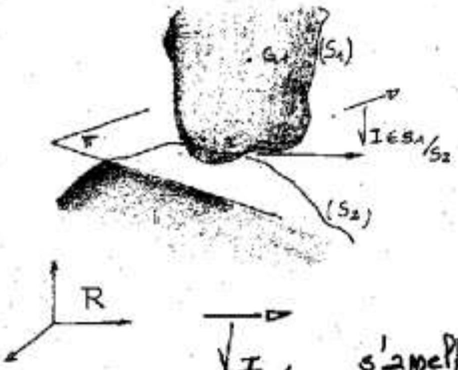
R voit le point de contact entre les 2 solides évoluer sur l'axe $O\vec{x}$. $\vec{V}_{I/R} = \dot{\lambda}\,\vec{x}$

à l'instant t, (pour une durée très courte), le point I du sol coïncidant avec le point I précédent, ne bouge pas.
$\vec{V}_{I \in SOL/R} = \vec{0}$ puisque l'observateur est lié au sol.

à l'instant t, (pour une durée très courte), le point I du solide, coïncidant avec le point I, point de contact, soit a une vitesse nulle V_I si le solide roule sans glisser, soit a une vitesse selon $O\vec{x}$ si le solide glisse. $\vec{V}_{I \in S/SoL} = \vec{0}$ ou = vitesse de glissement.

Le problème consiste en général à :
- calculer la vitesse de glissement.
- à écrire les conditions de roulement sans glissement.

I Définitions



2.1 : Soient R un espace.
S_1 et S_2 2 solides en contact
à l'instant t le contact est en I,
π le plan tangent de contact.

$\overrightarrow{V}_{I/R}$ s'appelle la vitesse du point de contact ou point géométrique.

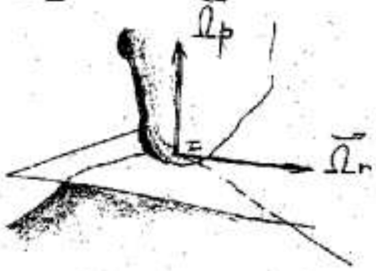
$\overrightarrow{V}_{I \in S_1/S_2}$ s'appelle vitesse de glissement. elle est contenue dans le plan tangent de contact.

Rq : Pour l'observateur R, les lieux successifs du contact entre les 2 solides décrit une trajectoire dans R.
Pour un observateur lié au solide S_1, les lieux successifs du contact sont sur une trajectoire tracée sur le solide.

2.2 Soit $\vec{\Omega}_{S_1/S_2}$ On peut le décomposer en 2 rotations :

$\overrightarrow{\Omega}_{S/S_2}$ de pivotement $\perp \pi$ noté $\vec{\Omega}_p$

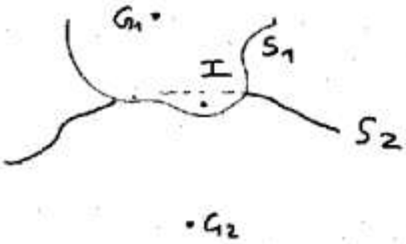
$\vec{\Omega}_{S_1/S_2}$ de roulement, compris dans le plan π. noté $\vec{\Omega}_r$.



III Comment calculer la vitesse de glissement ?

On utilise soit le transport (équiprojectivité des vecteurs vitesse des points d'un solide), soit la composition.

La dérivation du vecteur position $\overrightarrow{OI}$ nous donnent la vitesse du point géométrique / R.



$$\overrightarrow{V}_{I\in S_1/S_2} = \overrightarrow{V}_{I\in S_1/R} - \overrightarrow{V}_{I\in S_2/R}$$

où
$$\overrightarrow{V}_{I\in S_1/R} = \overrightarrow{V}_{G_1\in S_1/R} + \overrightarrow{IG_1}\wedge \overrightarrow{\Omega}_{S_1/R}$$
$$\overrightarrow{V}_{I\in S_2/R} = \overrightarrow{V}_{G_2\in S_2/R} + \overrightarrow{IG_2}\wedge \overrightarrow{\Omega}_{S_2/R}$$

On peut composer la vitesse du point géométrique.

$$\overrightarrow{V}_{I/R} = \overrightarrow{V}_{I/S_1} + \overrightarrow{V}_{I\in S_1/S_2} + \overrightarrow{V}_{I\in S_2/R}$$

ou
$$\overrightarrow{V}_{I/S_2} = \overrightarrow{V}_{I/S_1} + \overrightarrow{V}_{I\in S_1/S_2}$$

Ces différentes méthodes sont au choix du mécanicien.

appliquons ces différentes méthodes à l'exercice du I.

la vitesse de glissement est. $\overrightarrow{V}_{I\in S/R}$

l'équiprojectivité des vecteurs vitesse de S nous permet d'écrire

$$\overrightarrow{V}_{I\in S/R} = \overrightarrow{V}_{C\in S/R} + \overrightarrow{IC}\wedge \overrightarrow{\Omega}_{S/R}$$

$$\overrightarrow{V}_{I\in S/R} = \dot{\lambda}\,\vec{x} + r\vec{y} \wedge \dot{\psi}\,\vec{z}$$
$$= \dot{\lambda}\,\vec{x} + r\dot{\psi}\,\vec{x} = (\dot{\lambda} + r\dot{\psi})\,\vec{x}.$$

Rq :

Si nous avions calculé $\overrightarrow{V}_{P\in S/R}$, nous aurions utilisé $r\,\vec{x}_s$

$$\overrightarrow{V}_{P\in S/R} = \dot{\lambda}\,\vec{x} + r\vec{x}_s \wedge \dot{\psi}\,\vec{z}$$
$$= \dot{\lambda}\,\vec{x} + -r\dot{\psi}\,\vec{y}_s$$

ce transport (de $\overrightarrow{V}_{I\in S/R}$) n'est valable que pour le point I de S, à l'instant t au contact avec R (sol).

seconde méthode :

$$\overrightarrow{V}_{I/R} = \overrightarrow{V}_{I/S} + \overrightarrow{V}_{I\in S/R}$$
$$\Rightarrow V_{I\in S/R} = \overrightarrow{V}_{I/R} - \overrightarrow{V}_{I/S}$$
$$\overrightarrow{V}_{I/R} = \left[\frac{d\overrightarrow{OI}}{dt}\right]_R = \dot{\lambda}\,\vec{x}$$
$$\overrightarrow{V}_{I/S} = \left[\frac{d\overrightarrow{CI}}{dt}\right]_S = \left[\frac{d\overrightarrow{CI}}{dt}\right]_R + \overrightarrow{\Omega}_{R/S} \wedge \overrightarrow{CI}$$
$$= \vec{0} + (-\dot{\psi}\,\vec{z}) \wedge -r\vec{y}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V}_{I\in S/R} = (\dot{\lambda} + r\dot{\psi})\,\vec{x}.$$

Conditions de roulement sans glissement.

$$\dot{\lambda} + r\dot{\psi} = 0. \quad \Rightarrow \dot{\lambda} = 0 \text{ et } \dot{\psi} = 0.$$
$$\dot{\lambda} = -r\dot{\psi}$$

V Calcul des accélérations.

Si la vitesse de glissement est nulle, son accélération en général ne l'est pas.

Dériver la vitesse de glissement ne permet pas de déterminer l'accélération de $I \in S_1/S_2$. En effet on a vu dans l'application du 3, que l'on a transporté avec $r\vec{y}$ au lieu de $r\vec{x_s}$.

On calcule l'accélération $\vec{\Gamma}_{I \in S_1/S_2}$ en utilisant le transport.

par ex : $\vec{\Gamma}_{I \in S_1/S_2} = \vec{\Gamma}_{G_1 \in S_1/S_2} + \vec{IG_1} \wedge \ldots + \ldots$

L'accélération du point géométrique, peut être calculée par dérivation.

application à l'exemple :

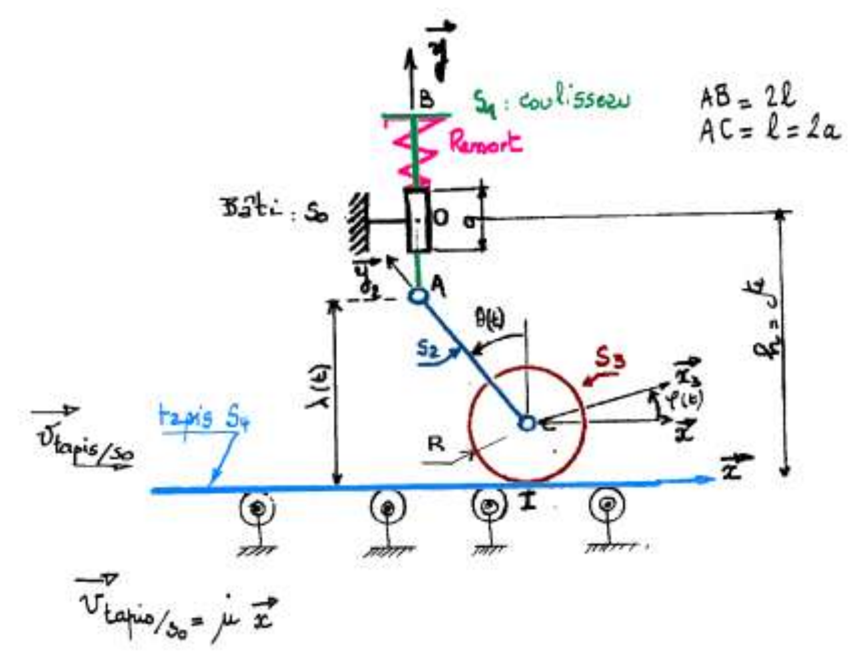
$$\vec{\Gamma}_{I/R} = \left[\frac{d\vec{V}_{I/R}}{dt}\right]_R = \ddot{\lambda}\,\vec{x}$$

$$\vec{\Gamma}_{I \in S/R} \neq (\ddot{\lambda} + r\ddot{\varphi})\,\vec{x}.$$

$$\vec{\Gamma}_{I \in S/R} = \vec{\Gamma}_{C \in S/R} + \vec{IC} \wedge \dot{\vec{\Omega}}_{S/R} + (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{IC}) \wedge \vec{\Omega}_{S/R}$$

$$= \ddot{\lambda}\,\vec{x} + r\vec{y} \wedge \ddot{\varphi}\,\vec{z} + (\dot{\varphi}\vec{z} \wedge r\vec{y}) \wedge \dot{\varphi}\,\vec{z}$$

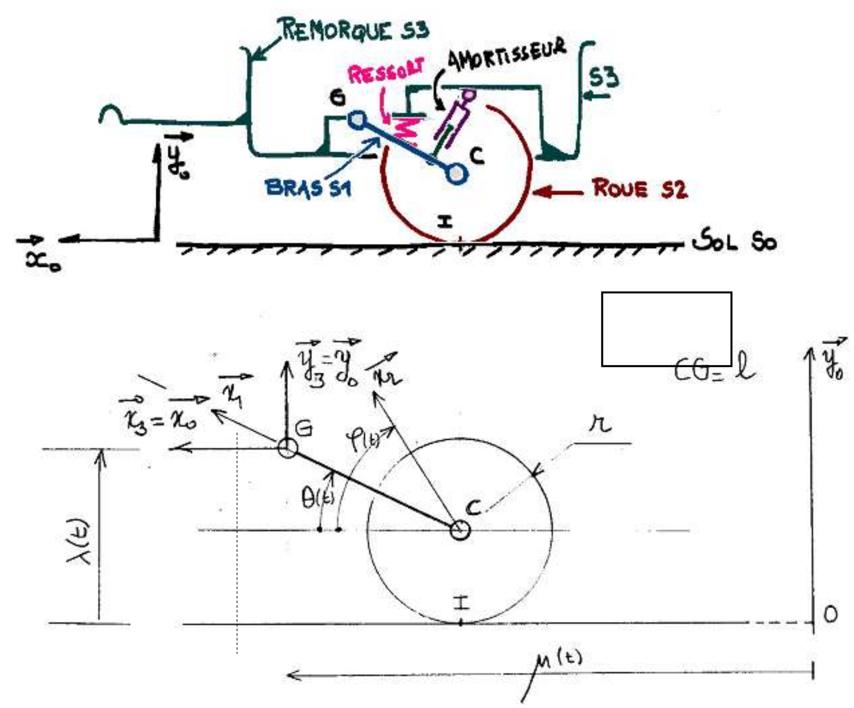
$$\vec{\Gamma}_{I \in S/R} = (\ddot{\lambda} + r\ddot{\varphi})\,\vec{x} + r\dot{\varphi}^2\,\vec{y}.$$



La masse du système a tendance à faire descendre le coulisseau, le ressort maintient un équilibre.

Les paramètres de position sont θ(t), λ(t), φ(t).

Déterminer les liaisons entre les paramètres s'il y a roulement sans glissement en I.



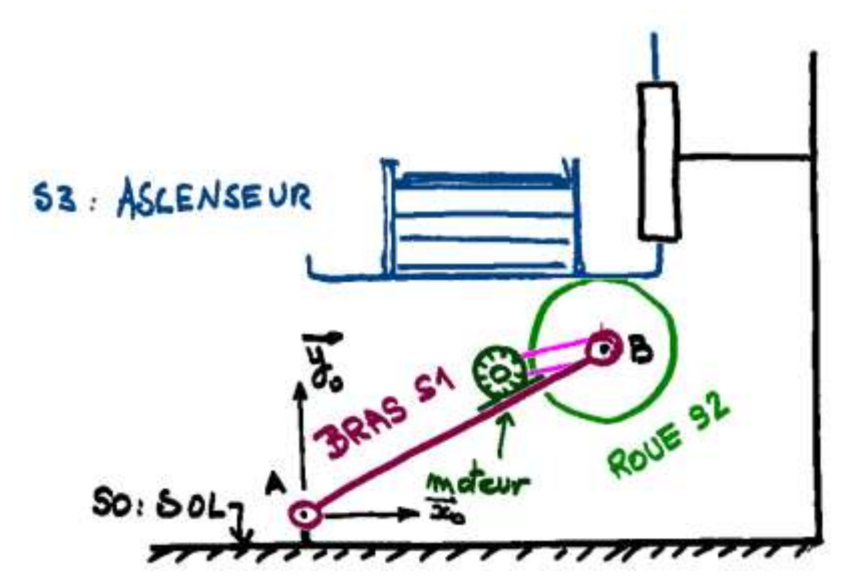
Le schéma ci-contre représente une remorque S_3. L'essieu arrière est articulé en G. Un bras (GC=$\boldsymbol{\ell}$) S_1 est en liaison pivot (G**z**) avec la remorque ; les roues S_2 sont en liaison pivot (C**z**) avec le bras.

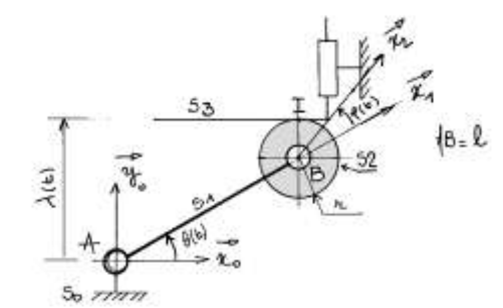
Le sol est supposé plan et horizontal. R_0 est lié au sol S_0 : $R_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$

On note :

- μ(t) la distance de G par rapport au sol.
- λ(t) la cote du point G par rapport au sol.
- φ(t) l'orientation de la roue par rapport au sol.
- θ(t) l'orientation du bras par rapport au sol.

Ecrire, en fonction des paramètres énoncés plus haut, la vitesse de I ∈2/0.
Déterminer les conditions de roulement sans glissement.
(cc icam Nantes 2008)





Le moteur fait tourner la roue dentée S2 qui roule sans glisser sur S3. Déterminer la liaison entre les paramètres.

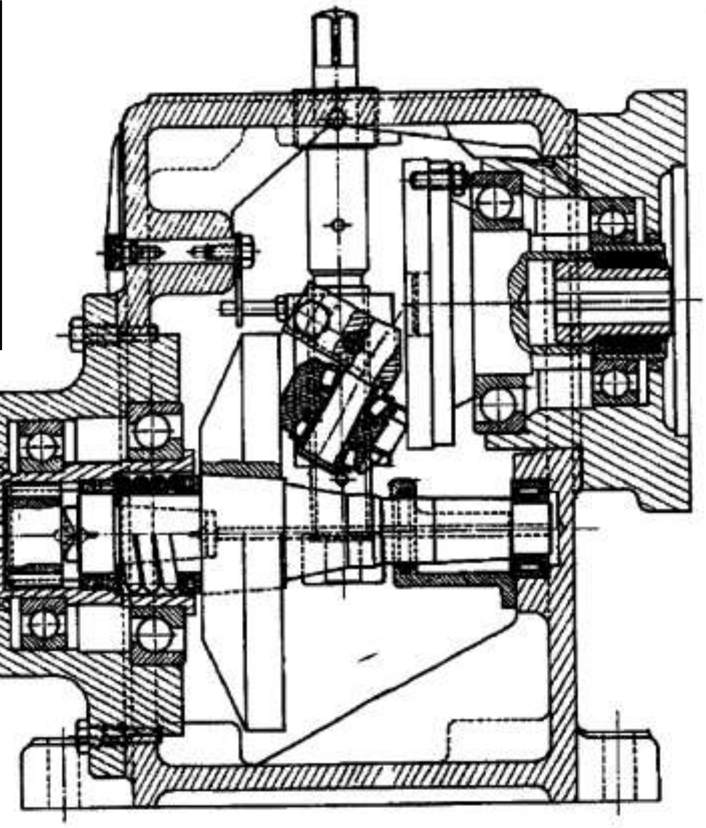
<u>Recherche d'une loi entrée-sortie</u>

Pour rechercher la loi d'entrée-sortie, si on ne s'intéresse pas à l'aspect mécanique du contact (conditions de roulement sans glissement), on peut écrire directement que la vitesse de glissement est nulle. Prenons l'exemple ci-dessous :

$$\vec{V}_{I\in S4/S5} = \vec{V}_{I\in S4/S0} - \vec{V}_{I\in S5/S0} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{I\in S4/S0} = \vec{V}_{I\in S5/S0}$$

En calculant chaque terme de l'égalité en fonction des vitesses d'entrée et de sortie, on trouvera la loi d'entrée-sortie.
On pourra appliquer cette méthode aux trains d'engrenages, aux réducteurs et variateurs à billes, à disques ...



VARIATEUR FU A GALETS