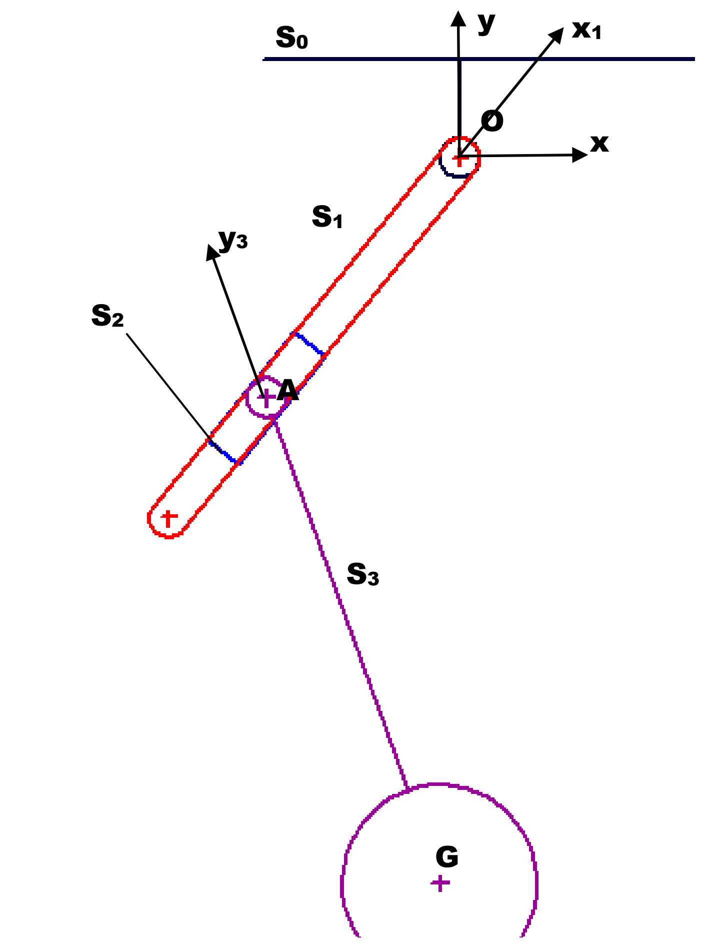


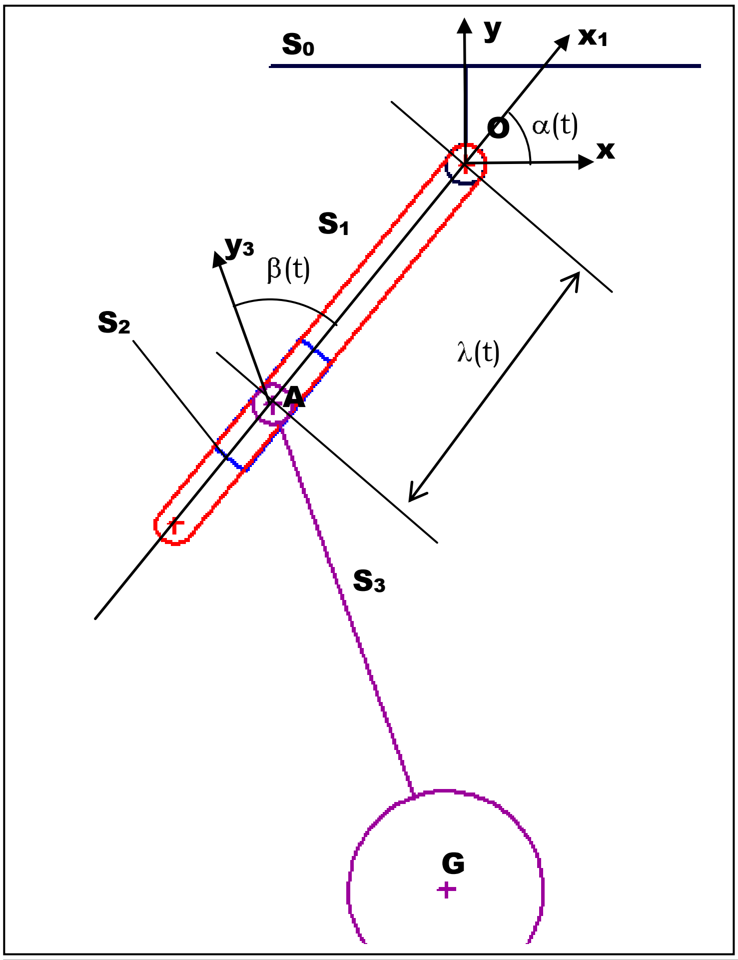
Un double pendule expérimental est modélisé ci contre. Il est constitué de :

- Un bâti S_0.
- Un premier pendule S_1 en liaison pivot d'axe (O, **z**) avec S_0.
- Un coulisseau S_2 en liaison glissière avec S_1 d'axe (A, $\mathbf{x_1}$).
- Un pendule S_3 en liaison pivot d'axe (A, **z**) avec le coulisseau S_2.

Le modèle dynamique solid-concept comprend aussi :

- Un ressort entre le coulisseau et la glissière.
- Du frottement visqueux dans la liaison glissière.
- Du frottement visqueux dans la liaison pivot entre S_2 et S_3.
- Le solide S_1 est pesant et a une inertie.
- Le solide S_3 est pesant.

1. Paramétrage
   a. Quel est le mouvement de S_1 par rapport à S_0 ?
   b. $\alpha(t)$ est le paramètre de position décrivant le mouvement de S_1 par rapport à S_0. Placer sur le schéma ce paramètre si $\mathbf{\Omega_{1/0}} = + \alpha°(t)\ \mathbf{z}$.
   c. Quel est le mouvement de S_2 par rapport à S_1 ?
   d. $\lambda(t)$ est le paramètre de position décrivant le mouvement de S_2 par rapport à S_1. Il quantifie la distance variable entre O et A. Placer sur le schéma ce paramètre de position.
   e. Ecrire le vecteur **OA** en fonction de $\lambda(t)$ et de $\mathbf{x_1}$.
   f. Quel est le mouvement de S_3 par rapport à S_2 ?
   g. $\beta(t)$ est le paramètre de position décrivant le mouvement de S_3 par rapport à S_2. Placer sur le schéma $\beta(t)$, entre $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{y_3}$, si $\mathbf{\Omega_{3/2}} = + \beta°(t)\ \mathbf{z}$ et si $\mathbf{GA} = L\ \mathbf{y_3}$.
2. Calcul des vecteurs vitesse des points des solides
   a. Ecrire $\mathbf{x_1}$ en fonction des vecteurs **x** et **y**.
   b. Dériver cette expression par rapport au temps, par rapport à S_0 et l'exprimer en fonction de $\alpha°(t)$ et de $\mathbf{y_1}$.
   c. Calculer $\mathbf{\Omega_{1/0}} \wedge \mathbf{x_1}$. Conclure sur la dérivation du vecteur unitaire $\mathbf{x_1}$.
   d. Calculer $\mathbf{VA/S_0}$ en dérivant le vecteur position.
   e. Aurait-on pu calculer $\mathbf{VA/S_0}$ en utilisant l'équiprojectivité des vecteurs vitesse entre O et A ?
   f. Calculer $\mathbf{VG/S_0}$ en dérivant le vecteur position.
   g. Aurait-on pu calculer $\mathbf{VG/S_0}$ en utilisant l'équiprojectivité des vecteurs vitesse entre A et G ?
   h. Ecrire le torseur cinématique de chaque solide décrivant leur mouvement par rapport au bâti en un point que vous choisirez : $\{ \mathbf{\Omega_{i/0}} = \quad ; \mathbf{VPt/S_0} = \quad \}_{Pt}$



S_1 a un mouvement de rotation autour d'un axe fixe $(O,\mathbf{z})$ par rapport à S_0

L'angle $\alpha(t)$ se place dans le sens positif, de $\mathbf{x}$ vers $\mathbf{y}$, entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x1}$. Le vecteur rotation $\mathbf{\Omega_{1/0}} = + \alpha°(t)\ \mathbf{z}$.

S_2 a un mouvement de translation rectiligne selon AO par rapport à S_1. $\mathbf{OA} = - \lambda(t)\ \mathbf{x_1}$

S_3 a un mouvement de rotation autour d'un axe fixe $(A,\mathbf{z})$ par rapport à S_2

L'angle $\beta(t)$ se place dans le sens positif, de $\mathbf{x}$ vers $\mathbf{y}$, entre $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{y_3}$. Le vecteur rotation $\mathbf{\Omega_{3/2}} = + \beta°(t)\ \mathbf{z}$.

$\mathbf{x_1} = \cos\alpha\ \mathbf{x} + \sin\alpha\ \mathbf{y}$

$[d\ \mathbf{x_1}/dt]_0 = - \alpha°\ \sin\alpha\ \mathbf{x} + \alpha°\ \cos\alpha\ \mathbf{y}$

$\mathbf{\Omega_{1/0}} = + \alpha°(t)\ \mathbf{z}$

$\mathbf{\Omega_{1/0}} \wedge \mathbf{x_1} = \alpha°(t)\ \mathbf{z} \wedge \mathbf{x_1} = \alpha°(t)\ \mathbf{y_1}$

$[d\ \mathbf{x_1}/dt]_0 = \alpha°\ (- \sin\alpha\ \mathbf{x} + \cos\alpha\ \mathbf{y}) = \alpha°(t)\ \mathbf{y_1} = \mathbf{\Omega_{1/0}} \wedge \mathbf{x_1}$ [dérivation du vecteur unitaire]

$\mathbf{VA/0} = [d\ (-\lambda\ \mathbf{x_1})/dt]_0 = - \lambda°\ \mathbf{x_1} - \lambda\ [d\ \mathbf{x_1}/dt]_0 = - \lambda°\ \mathbf{x_1} - \lambda\ \alpha°(t)\ \mathbf{y_1}$ $\boxed{\mathbf{VA/0} = - \lambda°\ \mathbf{x_1} - \lambda\ \alpha°(t)\ \mathbf{y_1}}$

On ne peut pas écrire $\mathbf{VA/0} = \mathbf{VO/0} + \mathbf{AO} \wedge \mathbf{\Omega_{1/0}}$ car A et O n'appartiennent pas au même solide. Il faut toujours écrire la relation sous la forme $\mathbf{VA{\in}1/0} = \mathbf{VO{\in}1/0} + \mathbf{AO} \wedge \mathbf{\Omega_{1/0}}$. Là on voit bien qu'il y a une incohérence. A n'appartient pas à S_1. On ne peut donc pas utiliser l'équiprojectivité (ou transport, ou champ distributif des vitesses des points d'un solide) dans ce cas.

$\mathbf{VB/0} = [d\ (-\lambda\ \mathbf{x_1} - L\ \ \mathbf{y_3})/dt]_0 = - \lambda°\ \mathbf{x_1} - \lambda\ \alpha°(t)\ \mathbf{y_1} - L\ \mathbf{\Omega_{3/0}} \wedge \mathbf{y_3}$

$= - \lambda°\ \mathbf{x_1} - \lambda\ \alpha°(t)\ \mathbf{y_1} - L\ (\alpha°\ \mathbf{z} + \beta°\ \mathbf{z}) \wedge \mathbf{y_3}$ $\boxed{\mathbf{VG/0} = - \lambda°\ \mathbf{x_1} - \lambda\ \alpha°(t)\ \mathbf{y_1} + L\ (\alpha°+\beta°)\ \mathbf{x_3}}$

Cette fois on aurait pu utiliser l'équiprojectivité (ou transport, ou champ distributif des vitesses des points d'un solide) :

$\mathbf{VG{\in}3/0} = \mathbf{VA{\in}3/0} + \mathbf{GA} \wedge \mathbf{\Omega_{3/0}} = - \lambda°\ \mathbf{x_1} - \lambda\ \alpha°(t)\ \mathbf{y_1} + L\ \mathbf{y_3} \wedge \mathbf{\Omega_{3/0}}$

$\{\mathcal{V}\ S_1/S_0\} = \{\ \mathbf{\Omega_{1/0}} = \alpha°(t)\ \mathbf{z}\ \ ;\ \mathbf{VO/S_0} = \mathbf{0}\}_O$

$\{\mathcal{V}\ S_2/S_0\} = \{\ \mathbf{\Omega_{2/0}} = \alpha°(t)\ \mathbf{z}\ \ ;\ \mathbf{VA/S_0} = - \lambda°\ \mathbf{x_1} - \lambda\ \alpha°(t)\ \mathbf{y_1}\ \}_A$

$\{\mathcal{V}\ S_3/S_0\} = \{\ \mathbf{\Omega_{3/0}} = (\alpha°(t) + \beta°(t))\ \mathbf{z}\ \ ;\ \mathbf{VA/S_0} = - \lambda°\ \mathbf{x_1} - \lambda\ \alpha°(t)\ \mathbf{y_1}\ \}_A$ ou bien en B :

$\{\mathcal{V}\ S_3/S_0\} = \{\ \mathbf{\Omega_{3/0}} = (\alpha°(t) + \beta°(t))\ \mathbf{z}\ \ ;\ \mathbf{VB/S_0} = - \lambda°\ \mathbf{x_1} - \lambda\ \alpha°(t)\ \mathbf{y_1} + L\ (\alpha°+\beta°)\ \mathbf{x_3}\ \}_B$