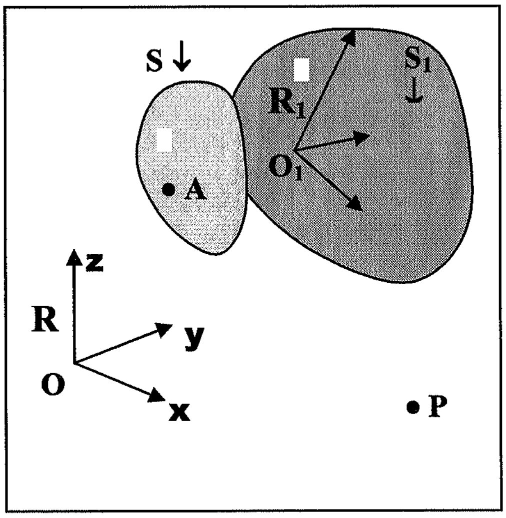
Composition des vecteurs vitesse
Composition des vecteurs accélération
Mise en évidence :

On utilisera les relations de composition des vitesses quand un solide ou un point matériel se déplace de façon évidente (souvent translation rectiligne) par rapport à un autre solide donc on connaît le mouvement, par exemple un préhenseur en translation par rapport au bras du manipulateur. En cinématique graphique, nous retrouverons souvent le cas d'actionneurs de type vérin : on distingue la vitesse de sortie de tige qui nous permet de calculer la vitesse des points du solide mu par le vérin.

1. Composition des vecteurs vitesse, notions de base :

Soient :

- Un solide S, indéformable.
- Un point A du solide S.
- Un repère R_1, en mouvement dans un repère R. Le solide S_1 est lié au repère Le solide S_1 est une restriction géométrique du repère R_1.
- Un point P est en mouvement par rapport au solide S_1, donc par rapport au repère R_1.



Ecrivons la définition de la vitesse du point P dans son mouvement /R:

$$\mathbf{VP/R} = {}^{(def)}[d\mathbf{OP}/dt]_R = {}^{(Chasles)}[d\mathbf{OO_1}/dt]_R + [d\mathbf{O_1P}/dt]_R$$

$$\mathbf{VP/R} = \mathbf{VO_1}/R + [d\mathbf{O_1P}/dt]_{R1} + \mathbf{\Omega\ R_1/R} \wedge \mathbf{O_1P}\ ^{(Bour)}$$

$$\mathbf{VP/R} = \mathbf{VO_1}/R + \mathbf{PO_1} \wedge \mathbf{\Omega\ R_1/R} + [d\mathbf{O_1P}/dt]_{R1}$$

$$\mathbf{VP/R} = [d\mathbf{O_1P}/dt]_{R1} + \mathbf{VO_1{\in}R_1}/R + \mathbf{PO_1} \wedge \mathbf{\Omega\ R_1/R}\ ^{(\text{équiprojectivité})}$$

On démontre alors la relation de composition des vecteurs vitesse :

Pour un point P qui se déplace dans R, pour un solide S_1 auquel est attaché le repère R_1 :
La vitesse du point P par rapport au repère R est égale à la vitesse du point P par rapport au repère R_1 plus la vitesse de P considéré fixe dans R_1 par rapport au repère R :

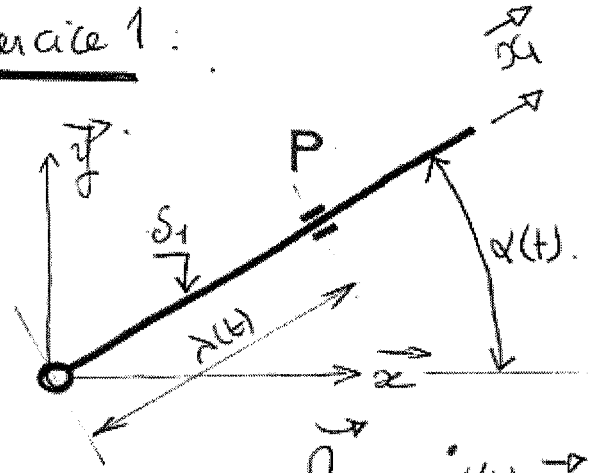
$$\mathbf{VP/R = VP/R_1 + VP{\in}R_1/R}$$

Le second terme $\mathbf{VP{\in}R_1/R = VO_1{\in}R_1/R + PO_1 \wedge \Omega\ R_1/R}$ est calculé à l'aide de la relation d'équiprojectivité à partir de la vitesse d'un point du solide ou repère R_1.

De même pour un point A d'un solide S :

$$\mathbf{VA{\in}S/R = VA{\in}S/R_1 + VA{\in}R_1/R}$$

Exercice 1 :



$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}(t)\,\vec{z}$$

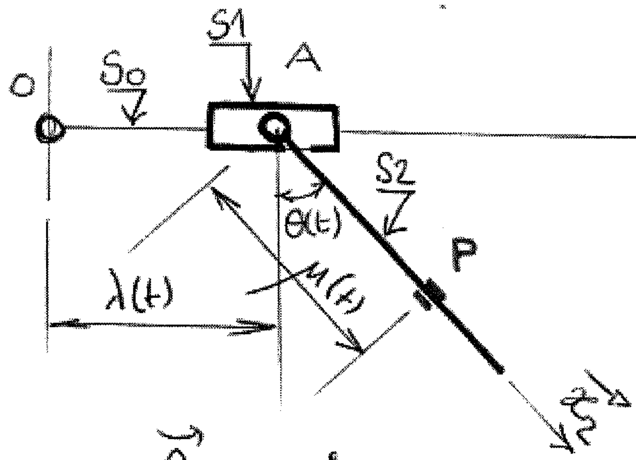
$$\vec{V}_{P/R} = \left[\frac{d\vec{OP}}{dt}\right]_R = \dot{\lambda}(t)\,\vec{x_1} + \lambda(t)\dot{\alpha}(t)\,\vec{y_1}$$

$$\vec{V}_{P/R} = \vec{V}_{P/R_1} + \vec{V}_{P\in R_1/R}$$

$$\vec{V}_{P/R_1} = \dot{\lambda}(t)\cdot\vec{x_1}$$

$$\vec{V}_{P\in R_1/R} = \vec{V}_{O\in R_1/R} + \vec{PO}\wedge\vec{\Omega}_{R_1/R}$$

Exercice 2



$$\vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\theta}(t)\,\vec{z}$$

$$\vec{V}_{P/0} = \vec{V}_{P/S_2} + \vec{V}_{P\in S2/S0}$$

$$\vec{V}_{P/S_2} = \dot{\mu}(t)\,\vec{x_2}$$

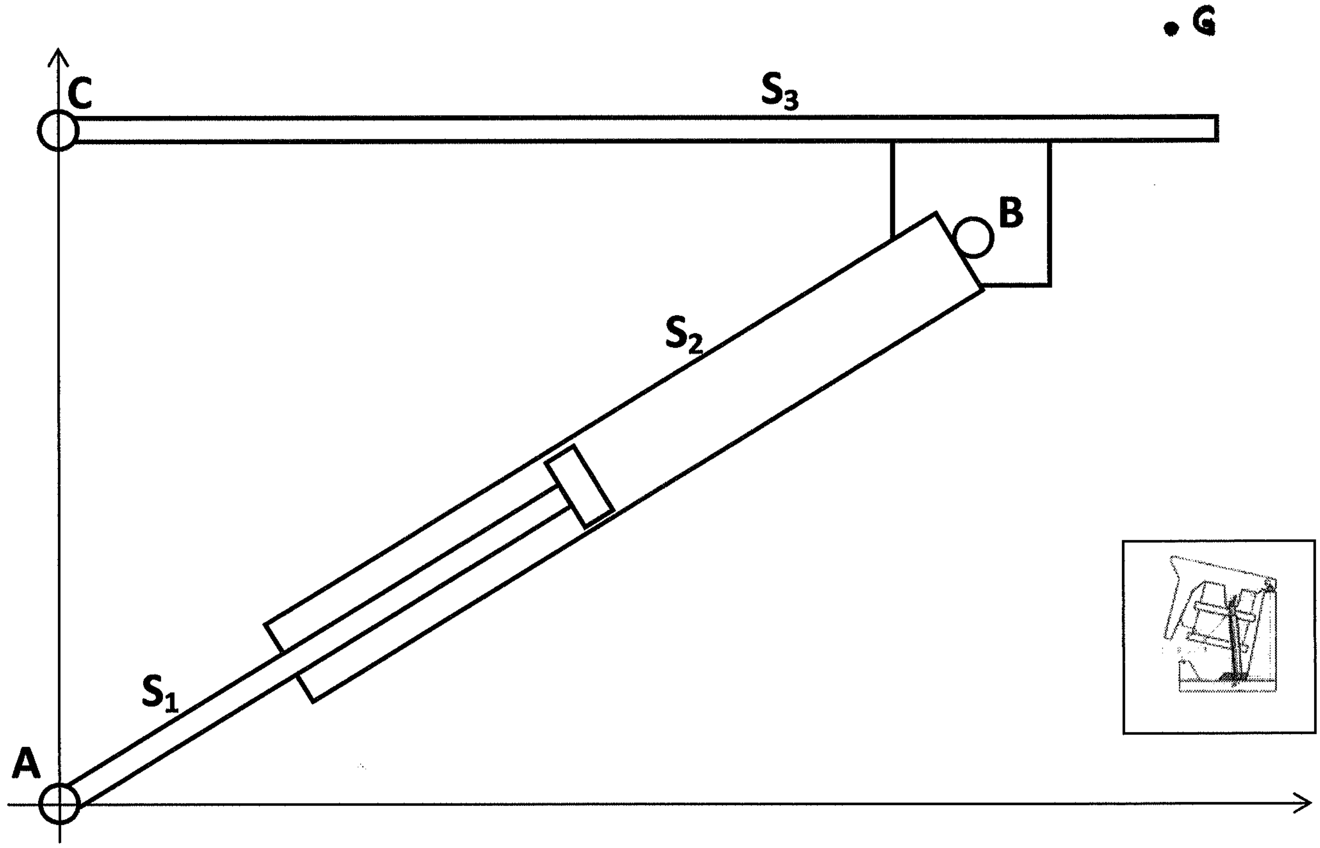
$$\vec{V}_{P\in S2/S0} = \vec{V}_{A\in S2/S0} + \vec{PA}\wedge\vec{\Omega}_{S2/S0}$$

$$\vec{V}_{A\in S2/S0} = \dot{\lambda}\,\vec{x}$$

$$\vec{PA}\wedge\vec{\Omega}_{2/0} = (-\mu(t)\,\vec{x_2})\wedge\dot{\theta}\,\vec{z}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{P/0} = \dot{\mu}(t)\,\vec{x_2} - \dot{\lambda}(t)\,\vec{x} + \mu(t)\,\dot{\theta}(t)\,\vec{y_2}$$

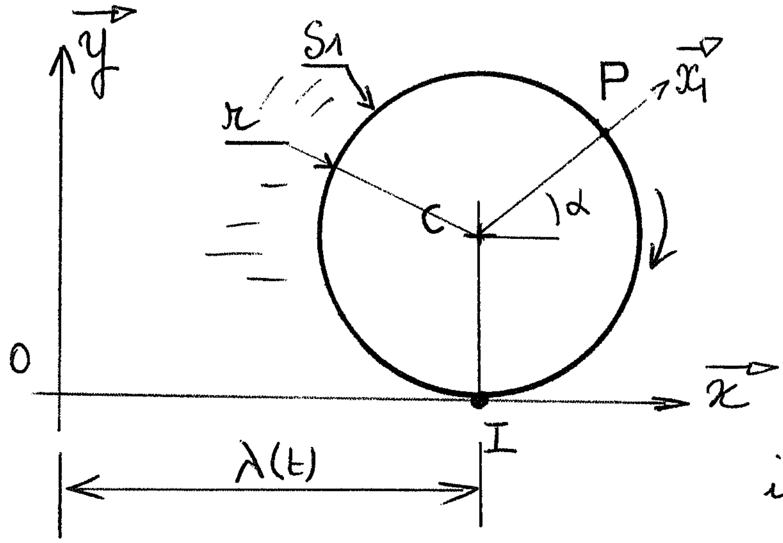
ETUDE DU MOUVEMENT DU VERIN



Notice de calcul

La vitesse de sortie de tige est de 4cm/s, déterminer la vitesse de descente de la charge en G

ROULEMENT ET GLISSEMENT.



Vitesse de I ?

$\vec{0}$?

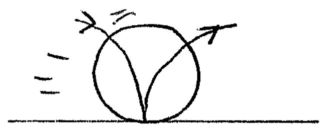
$\dot{\lambda}\,\vec{x}$?

il est nécessaire de préciser.

il y a 3 points I.

> I, point de contact. I n'appartient à aucun solide. $\vec{V}_{I/R} = \left[\dfrac{d\,\vec{OI}}{dt}\right]_R$.

> I qui appartient à S_1. avant, s'appelle P au contact, s'appelle I $\quad \vec{V}_{I\in S1/R}$



nulle si ROULEMENT SANS GLISSEMENT

> I qui appartient à S_0 $\quad \vec{V}_{I\in S0/R}$.

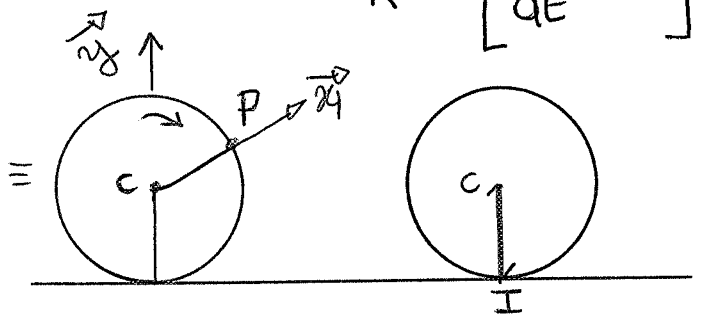
La vitesse du point de contact s'obtient par <u>DERIVATION</u>.
La vitesse du point du solide s'obtient par <u>équiprojectivité</u> (ou transport ou loi de distribution) des vitesses des points d'un solide, jamais par dérivation.

$$\text{ici} \quad \vec{V}_{I\in S1/R} = \vec{V}_{C\in S1/R} + \vec{IC} \wedge \vec{\Omega}_{S1/R}$$

Signification

$$\overrightarrow{V}_{P \in S_1/R} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\left(\lambda\vec{x} + r\vec{y} + r\vec{x_1}\right)\right]$$

$$\overrightarrow{V}_{I \in S_1/R} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OI}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\left(\lambda\vec{x} + r\vec{y} - r\vec{y}\right)\right]$$

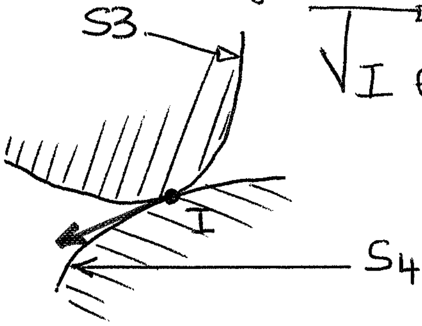


car $\vec{x_1}$, dans cette configuration, est confondu avec $-\vec{y}$

$(r\vec{y} + r\vec{x_1})$ s'annule si P devient I.
Or, la dérivée d'une fonction qui est nulle à cet instant, n'est pas nulle.

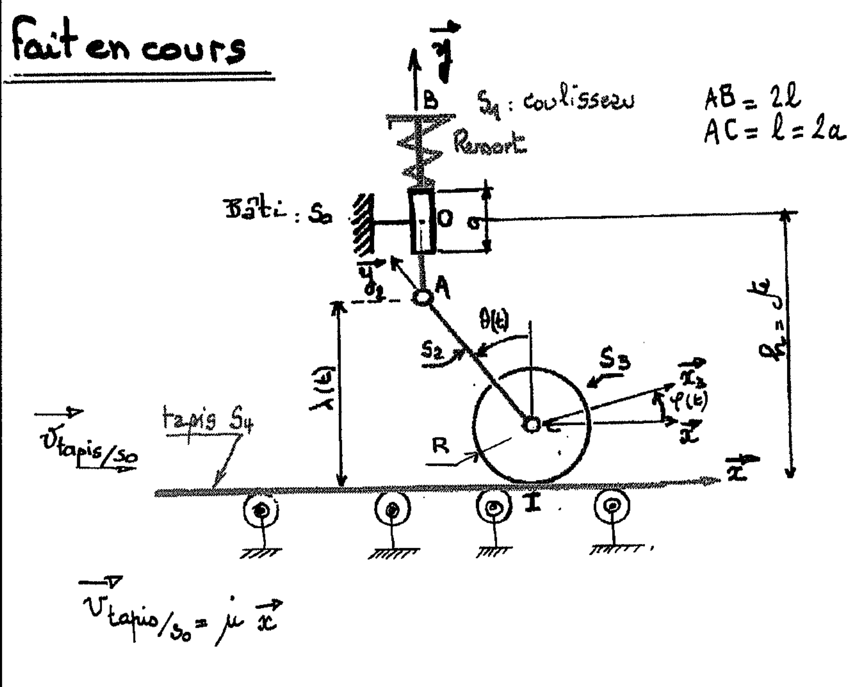
C'est la raison pour laquelle on calcule $\overrightarrow{V}_{I \in S_1/R}$ par équiprojectivité et non par dérivation.
(terme "caché" dont la dérivée n'est pas nulle.)

Cas général : $\overrightarrow{V}_{I/S_4} = \overrightarrow{V}_{I/S_3} + \overrightarrow{V}_{I \in S_3/S_4}$



$$\overrightarrow{V}_{I \in S_3/S_4} = \overrightarrow{V}_{I \in S_3/R} - \overrightarrow{V}_{I \in S_4/R}$$

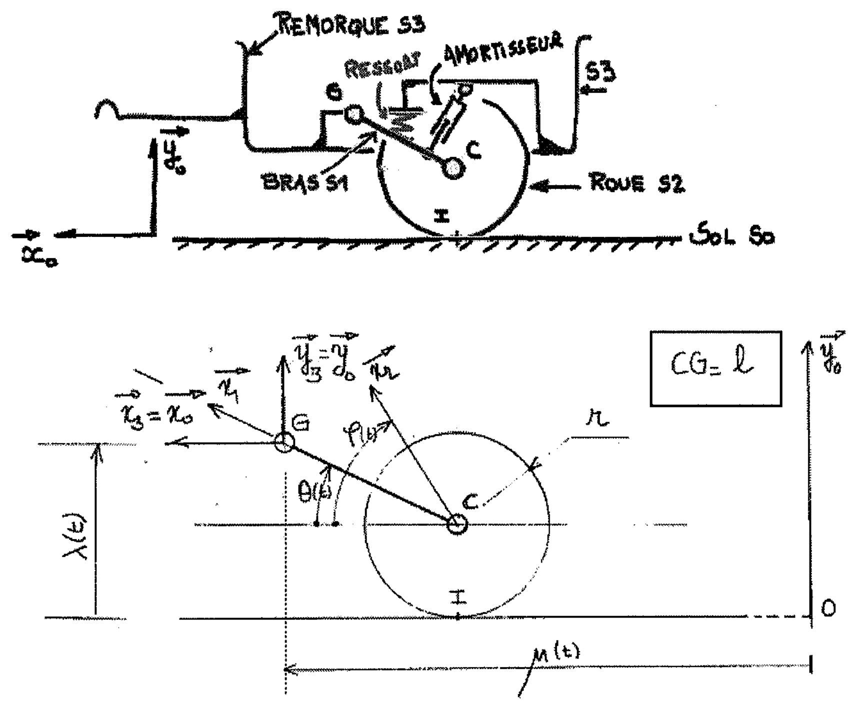
$\overrightarrow{V}_{I \in S_3/S_4}$ VITESSE DE GLISSEMENT.



La masse du système a tendance à faire descendre le coulisseau, le ressort maintient un équilibre.

Les paramètres de position sont $\theta(t)$, $\lambda(t)$, $\varphi(t)$.

Déterminer les liaisons entre les paramètres s'il y a roulement sans glissement en I.



Le schéma ci-contre représente une remorque S_3. L'essieu arrière est articulé en G. Un bras ($GC=\ell$) S_1 est en liaison pivot ($G\mathbf{z}$) avec la remorque ; les roues S_2 sont en liaison pivot ($C\mathbf{z}$) avec le bras.

Le sol est supposé plan et horizontal. R_0 est lié au sol S_0 : $R_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$

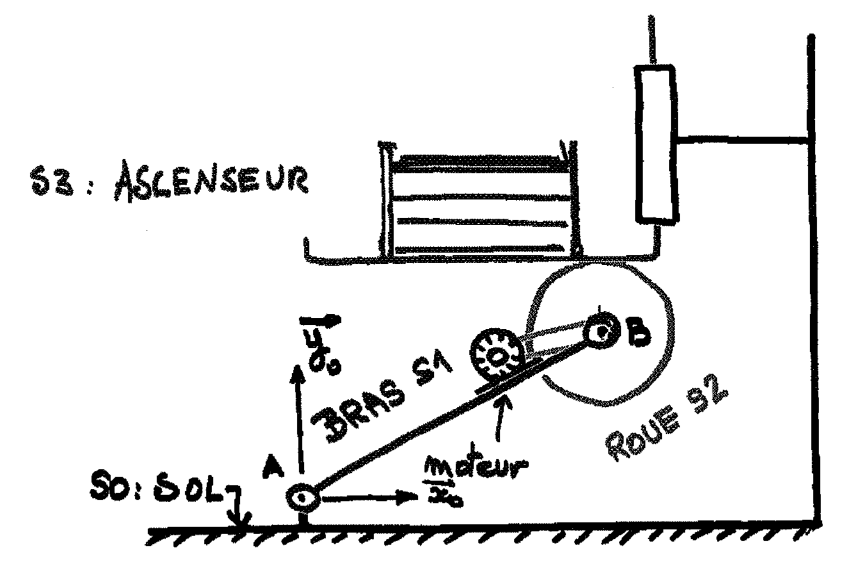
On note :

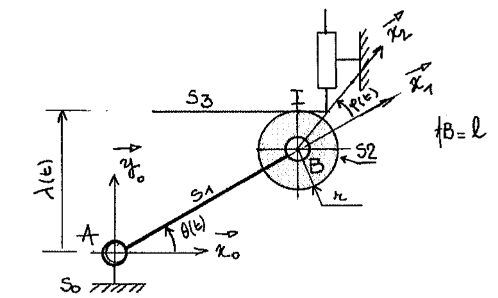
- $\mu(t)$ la distance de G par rapport au sol.
- $\lambda(t)$ la cote du point G par rapport au sol.
- $\varphi(t)$ l'orientation de la roue par rapport au sol.
- $\theta(t)$ l'orientation du bras par rapport au sol.

Ecrire, en fonction des paramètres énoncés plus haut, la vitesse de $I \in 2/0$.

Déterminer les conditions de roulement sans glissement.

(cc icam Nantes 2008)





Le moteur fait tourner la roue dentée S2 qui roule sans glisser sur S3.

Déterminer la liaison entre les paramètres.