En grec, CINEMA se traduit par MOUVEMENT. La cinématique est une partie de la mécanique rationnelle qui permet de décrire vectoriellement les mouvements des solides ou d'ensembles de solides.

- Les pré requis sont les notions de calcul vectoriel vues en début de cycle.

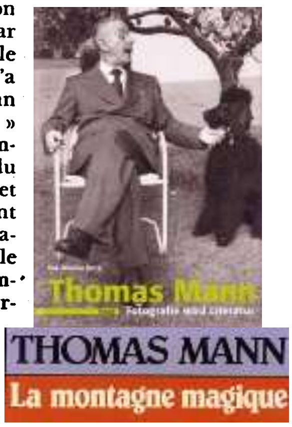
- La cinématique est un pré-requis de la dynamique des solides et de l'énergétique, (la statique étant un cas particulier de la dynamique des solides).

<u>Le cours de cinématique plane suivra le plan suivant :</u>

1. Cinématique du point, du point matériel, du point d'un solide.
2. Champ des vecteurs vitesse des points d'un solide.
3. Cinématique graphique.

CHANGEMENTS

QU'EST-CE que le temps? Un mystère! Sans réalité propre, il est tout-puissant. Il est une condition du monde phénoménal, un mouvement mêlé et lié à l'existence des corps dans l'espace, et à leur mouvement. Mais n'y aurait-il point de temps s'il n'y avait pas de mouvement? Point de mouvement s'il n'y avait pas de temps? Interrogez toujours! Le temps est-il fonction de l'espace? Ou est-ce le contraire? Ou sont-ils identiques l'un à l'autre? Ne vous lassez pas de questionner! Le temps est actif, il produit. Que produit-il? Le changement. « A présent » n'est pas « autrefois », « ici » n'est pas « là-bas », car entre les deux il y a mouvement. Mais comme le mouvement par lequel on mesure le temps est circulaire, refermé sur lui-même, c'est un mouvement et un changement que l'on pourrait aussi bien qualifier de repos et d'immobilité; car l'« alors » se répète sans cesse dans l' « à présent », le « là-bas » dans l' « ici ». Comme, d'autre part, on n'a pu, malgré les efforts les plus désespérés, se représenter un temps fini et un espace limité, on s'est décidé à « penser » le temps et l'espace comme éternels et infinis, apparemment, dans l'espoir d'y réussir, sinon parfaitement, du moins un peu mieux. Mais en postulant ainsi l'éternel et l'infini, n'a-t-on pas logiquement et mathématiquement détruit tout le fini et tout le limité? Ne l'a-t-on pas relativement réduit à zéro? Une succession est-elle possible dans l'éternel, et, dans l'infini, une juxtaposition? Comment mettre d'accord ces hypothèses auxiliaires de l'éter-



Bibliographie :

Dunod : Mécanique du solide (AGATI)

Les entités vectorielles $\mathbf{VA{\in}S_1/S_2}$, Γ $\mathbf{A{\in}S_1/S_2}$, $\Omega\mathbf{S_1/S_2}$,… sont en caractères gras.

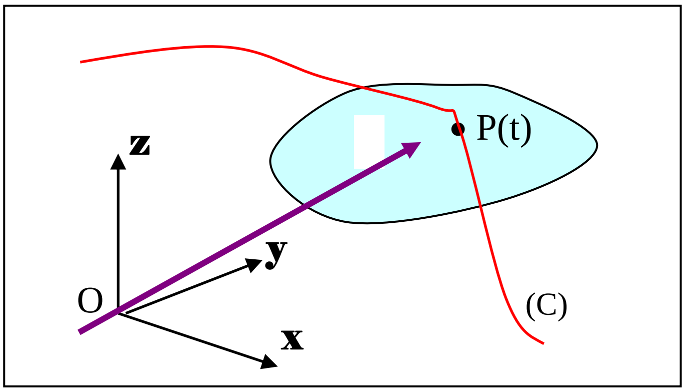
1 - Cinématique du point, du point matériel, du point d'un solide.

1.1. Hypothèses :

- Dans les mouvements que nous étudierons, les vitesses seront très inférieures à la vitesse de la lumière ; nous resterons donc dans le cadre de la mécanique *newtonienne*, par opposition à la mécanique *relativiste*.
- L'espace est de dimension 3, on appellera *référentiel espace-temps* un *repère* de l'espace auquel sera adjoint une base de temps (unité seconde).

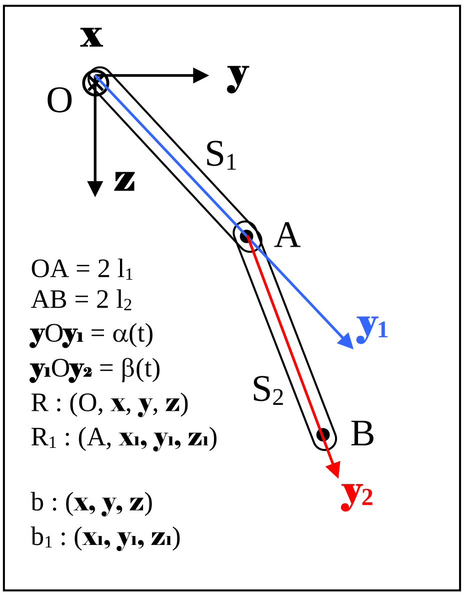
1.2. Vecteur position du point P

Le point P(t) considéré est un point matériel ou un point d'un solide. Il se meut dans un référentiel espace-temps : R(O, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$), t est la variable qui mesure le temps.
La courbe (C), lieux de P(t) durant le mouvement, s'appelle la trajectoire.



Définition :
OP(t) s'appelle le vecteur position du point P(t), dans le repère R (O, **x**, **y**, **z**), à la date t. Le vecteur position d'un point lie toujours l'origine du repère et le point.

Exemple :
Un double pendule est représenté ci-contre ; il est constitué d'un solide S_1 en liaison pivot (O, **x**) avec le bâti S_0, et d'un solide S_2 en liaison pivot (A, **x**) avec S_1. Le problème est plan.



Le comportement de ce double pendule est un problème de dynamique.

L'étude cinématique consistera à étudier les trajectoires, les vitesses et les accélérations des différents points.

OA est le vecteur position du point A dans le repère R.
OB est le vecteur position du point B dans le repère R.
AB est le vecteur position du point B dans le repère R_1 : (A, $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{z_1}$)

Le vecteur position **OB** s'écrit à l'aide des vecteurs directeurs $\mathbf{y_1}$ et $\mathbf{y_2}$ appartenant à des bases différentes: $\mathbf{OB} = 2\, l_1\, \mathbf{y_1} + 2\, l_2\, \mathbf{y_2}$
ou dans une base orthonormée directe :

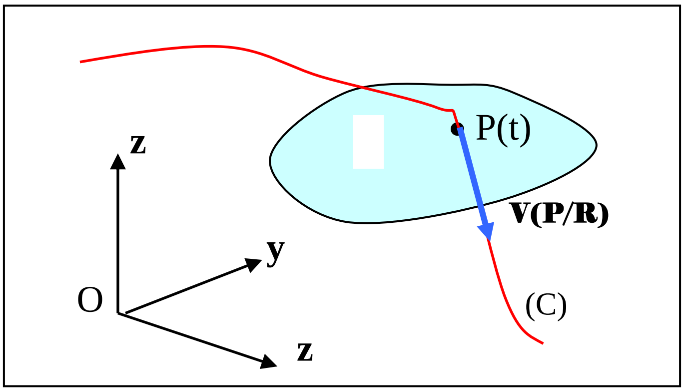
$$\mathbf{OB} = [\, 2\, l_1 \cos\alpha + 2\, l_2 \cos(\alpha+\beta)\,]\, \mathbf{y} + [\, 2\, l_1 \sin\alpha + 2\, l_2 \sin(\alpha+\beta)\,]\, \mathbf{z}$$

Quelle est l'écriture la plus simple ?

Les entités vectorielles $\mathbf{V}A\in S_1/S_2$, Γ $A\in S_1/S_2$, $\Omega S_1/S_2$,… sont en caractères gras.

1.3. Vecteur vitesse du point P en mouvement dans le référentiel R

Le point P(t) considéré est un point matériel ou un point d'un solide.
Il se meut dans un référentiel espace-temps : R(O, **x, y, z**), t est la variable qui mesure le temps.



Définitions :

V(P/R) s'appelle le vecteur vitesse du point P(t), dans le repère R (O, **x, y, z**).
V(P/R) est la dérivée du vecteur position pour un observateur lié à R.

$$\mathbf{V(P/R)} = \left[\frac{d\,\mathbf{OP(t)}}{dt}\right]_R$$ ou autre notation : $d_R\,\mathbf{OP(t)}/dt$

V(P/R) est tangent en P à la trajectoire (C).

$\left[\dfrac{d}{dt}\right]_R$ ou d_R /dt est l'opérateur dérivation vectorielle.

On dérive un vecteur par rapport au temps pour un observateur lié à un repère.

Dans l'exemple du double pendule, on peut rechercher les trajectoires, les vitesses ou les accélérations des points pour un observateur lié à S_0. R est lié à S_0.

V(A/R) = **V(A/S₀)** vitesse du point A dans son mouvement par rapport à $R \equiv S_0$.

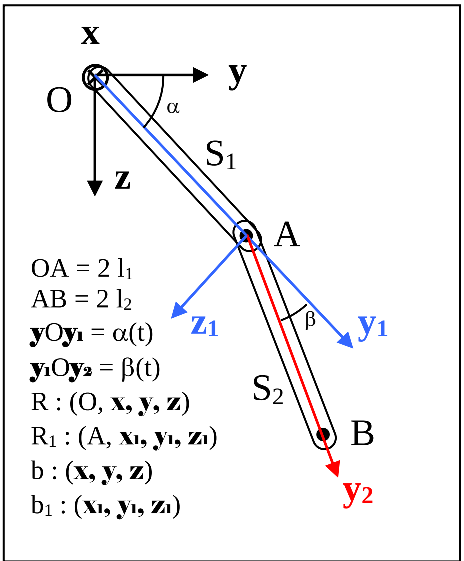
$\mathbf{OA} = 2\,l_1\,\mathbf{y_1} = [\,2\,l_1 \cos\alpha]\,\mathbf{y} + [\,2\,l_1 \sin\alpha]\,\mathbf{z}$

$[d\mathbf{OA}/dt]_R = -\,2\,l_1\,\alpha° \sin\alpha\,\mathbf{y} + 2\,l_1 \cos\alpha\,[d\mathbf{y}/dt]_R$
$\quad + 2\,l_1\,\alpha° \cos\alpha\,\mathbf{z} + 2\,l_1 \sin\alpha\,[d\mathbf{z}/dt]_R$

$[d\mathbf{y}/dt]_R = [d\mathbf{z}/dt]_R = 0$ car **y** et **z** sont invariables (fixes) dans le repère R.

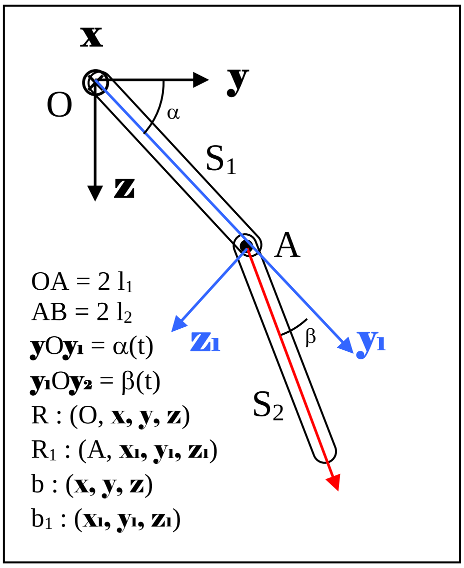
$[d\mathbf{OA}/dt]_R = -\,2\,l_1\,\alpha° \sin\alpha\,\mathbf{y} + 2\,l_1\,\alpha° \cos\alpha\,\mathbf{z}$
$[d\mathbf{OA}/dt]_R = 2\,l_1\,\alpha°\,\mathbf{z_1}$ car $\mathbf{z_1} = -\sin\alpha\,\mathbf{y} + \cos\alpha\,\mathbf{z}$

$\mathbf{V(A/R)} = 2\,l_1\,\alpha°\,\mathbf{z_1}$ Unité [L]/[t] (m/s)



Les entités vectorielles **VA∈S₁/S₂**, Γ **A∈S₁/S₂**, **ΩS₁/S₂**,… sont en caractères gras.

1.4 - Notions de dérivation vectorielle :



Rappelons le résultat de l'exercice précédent :

$\mathbf{OA} = 2\,l_1\,\mathbf{y_1} = [\,2\,l_1 \cos\alpha\,]\,\mathbf{y} + [\,2\,l_1 \sin\alpha\,]\,\mathbf{z}$

$[d\mathbf{OA}/dt]_R = -\,2\,l_1\,\alpha°\sin\alpha\,\mathbf{y} + 2\,l_1\,\alpha°\cos\alpha\,\mathbf{z}$

$[d\mathbf{OA}/dt]_R = 2\,l_1\,\alpha°\,\mathbf{z_1}$ car $\mathbf{z_1} = -\sin\alpha\,\mathbf{y} + \cos\alpha\,\mathbf{z}$

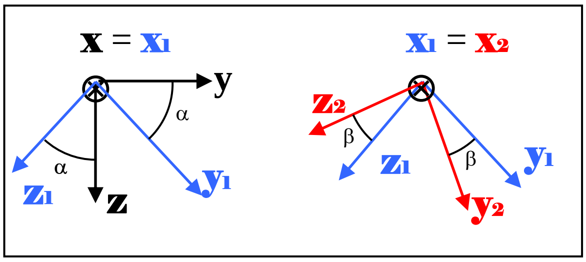
On remarque que $[d\mathbf{y_1}/dt]_R = \alpha°\,\mathbf{z_1}$

On pourrait calculer $[d\mathbf{z_1}/dt]_R = -\,\alpha°\,\mathbf{y_1}$

On pourrait calculer $[d\mathbf{x_1}/dt]_R = \mathbf{0}$

Définition :

Le vecteur $+\,\alpha°\,\mathbf{x_1}$ est noté $\mathbf{\Omega}R_1/R$, il s'appelle <u>vecteur rotation</u> de R_1 par rapport à R. Il caractérise le changement d'orientation de R_1 par rapport à R, ou de b_1 par rapport à b.
Le sens de $\mathbf{\Omega}R_1/R$ dépend du sens direct.



$[d\mathbf{y_1}/dt]_R = \alpha°\,\mathbf{x_1} \wedge \mathbf{y_1} = \mathbf{\Omega\,R_1/R} \wedge \mathbf{y_1} = \alpha°\,\mathbf{z_1}$

$[d\mathbf{z_1}/dt]_R = \alpha°\,\mathbf{x_1} \wedge \mathbf{z_1} = \mathbf{\Omega\,R_1/R} \wedge \mathbf{z_1} = -\,\alpha°\,\mathbf{y_1}$

$[d\mathbf{x_1}/dt]_R = \alpha°\,\mathbf{x_1} \wedge \mathbf{x_1} = \mathbf{\Omega\,R_1/R} \wedge \mathbf{x_1} = \mathbf{0}$

Calculons la dérivée $[d\mathbf{y_2}/dt]_R$

$\mathbf{y_2} = \cos\beta\,\mathbf{y_1} + \sin\beta\,\mathbf{z_1}$

$[d\mathbf{y_2}/dt]_R = -\,\beta°\sin\beta\,\mathbf{y_1} + \cos\beta\;\alpha°\,\mathbf{z_1} + \beta°\cos\beta\,\mathbf{z_1} + \sin\beta\,(-\,\alpha°\,\mathbf{y_1})$ **(uv'= u'v + uv')**

$\quad -\,(\alpha°+\beta°)\sin\beta\,\mathbf{y_1} + (\alpha°+\beta°)\cos\beta\,\mathbf{z_1}$

$\quad (\alpha°+\beta°)\,[-\sin\beta\,\mathbf{y_1} + \cos\beta\,\mathbf{z_1}]$

$[d\mathbf{y_2}/dt]_R = (\alpha°+\beta°)\,\mathbf{z_2}$ car $\mathbf{z_2} = [-\sin\beta\,\mathbf{y_1} + \cos\beta\,\mathbf{z_1}]$

$\mathbf{\Omega\,R_2/R} = (\alpha°+\beta°)\,\mathbf{x_1} = \alpha°\,\mathbf{x_1} + \beta°\,\mathbf{x_1} = \mathbf{\Omega\,R_2/R_1} + \mathbf{\Omega\,R_1/R}$

et $[d\mathbf{y_2}/dt]_R = (\alpha°+\beta°)\,\mathbf{x_1} \wedge \mathbf{y_2}$ car $\mathbf{x_1} \wedge \mathbf{y_2} = \mathbf{z_2}$

On admet que la dérivation par rapport au temps pour un observateur lié à R d'un vecteur unitaire $\mathbf{k}$ appartenant à une base b_k est égal à :

$$[d\mathbf{k}/dt]_R = \mathbf{\Omega}\,b_k/\mathbf{R} \wedge \mathbf{k}$$

Si un vecteur $\mathbf{U}$ s'écrit dans une base $b(\mathbf{x_i},\mathbf{y_i},\mathbf{z_i})$ $\mathbf{U} = q(t)\,\mathbf{x_i} + r(t)\,\mathbf{y_i} + s(t)\,\mathbf{z_i}$

$[d\mathbf{U}/dt]_R = dq(t)/dt\,\mathbf{x_i} + q(t)[d\mathbf{x_i}/dt]_R + dr(t)/dt\,\mathbf{y_i} + r(t)[d\mathbf{y_i}/dt]_R + ds(t)/dt\,\mathbf{z_i} + s(t)[d\mathbf{z_i}/dt]_R$

$\quad = dq(t)/dt\,\mathbf{x_i} + dr(t)/dt\,\mathbf{y_i} + ds(t)/dt\,\mathbf{z_i} + q(t)[d\mathbf{x_i}/dt]_R + r(t)[d\mathbf{y_i}/dt]_R + s(t)[d\mathbf{z_i}/dt]_R$

On admet que la dérivation par rapport au temps pour un observateur lié à R d'un vecteur $\mathbf{U}$ qui s'exprime dans une base bi est égal à :

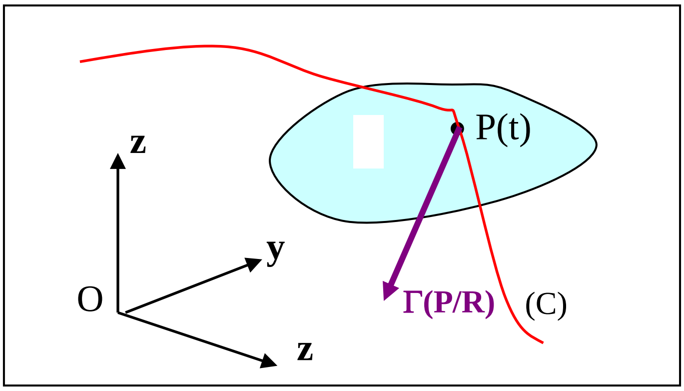
$$[d\mathbf{U}/dt]_R = [d\mathbf{U}/dt]_{bi} + \mathbf{\Omega}\,b_i/\mathbf{R} \wedge \mathbf{U}$$

Appelée Formule de Bour

Voir www.annales.org/archives/x/bour.html

1.5. Vecteur accélération du point P en mouvement dans le référentiel R

Le point P(t) considéré est un point matériel ou un point d'un solide. Il se meut dans un référentiel espace-temps : R(O, **x, y, z**), t est la variable qui mesure le temps.



Définition :

Γ(P/R) s'appelle vecteur accélération du point P(t), dans le repère R (O, **x, y, z**), à la date t. **Γ(P/R)** est la dérivée du vecteur vitesse du point P pour un observateur lié à R.

$$\boldsymbol{\Gamma}(P/R) = \left[\frac{d\,\mathbf{V}P/R}{dt}\right]_R$$ ou autre notation : $d_R\,\mathbf{V}P/R/dt$

Γ(P/R) peut-être décomposée en deux accélérations :

- γ_t (accélération tangentielle) tangente en P à la trajectoire (C),
- γ_c (accélération centripète) normale (⊥) à la trajectoire et orientée vers le centre de cette trajectoire

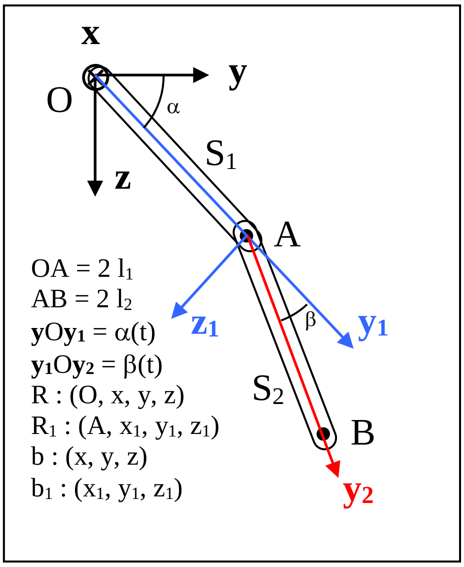
Dans l'exemple du double pendule, on peut rechercher les accélérations des points pour un observateur lié à S_0. R est lié à S_0.

Γ(A/R) = **Γ(A/S₀)** vitesse du point A dans son mouvement par rapport à $R \equiv S_0$.

$\mathbf{V}(A/R) = 2\, l_1\, \alpha^\circ\, \mathbf{z_1}$
$\boldsymbol{\Gamma}(A/R) = [d\, \mathbf{V}(A/R)/dt]_R$

$\boldsymbol{\Gamma}(A/R) = 2\, l_1\, \alpha^{\circ\circ}\, \mathbf{z_1} + 2\, l_1\, \alpha^\circ\, [d\mathbf{z_1}/dt]_R$
$\boldsymbol{\Gamma}(A/R) = 2\, l_1\, \alpha^{\circ\circ}\, \mathbf{z_1} + 2\, l_1\, \alpha^\circ\, [-\alpha^\circ\, \mathbf{y_1}] \wedge \mathbf{z_1}$

$\boldsymbol{\Gamma}(A/R) = 2\, l_1\, \alpha^{\circ\circ}\, \mathbf{z_1} - 2\, l_1\, \alpha^{\circ 2}\, \mathbf{x_1}$



avec :

- γ_t (accélération tangentielle) = $2\, l_1\, \alpha^{\circ\circ}\, \mathbf{z_1}$
- γ_c (accélération centripète) = $-2\, l_1\, \alpha^{\circ 2}\, \mathbf{x_1}$ orienté vers l'intérieur de la trajectoire de A.

Les entités vectorielles **VA∈S₁/S₂**, Γ **A∈S₁/S₂**, Ω**S₁/S₂**,… sont en caractères gras.

2. Champ des vecteurs vitesse des points d'un solide.

2.1 - Notions de champ de vecteurs :

Soit un espace affine de dimension 3 : $\mathcal{E}$
Soit un espace vectoriel associé de dimension 3 : E

Une application de $\mathcal{E}$ dans E qui, à tout point P de l'espace affine fait correspondre le vecteur **H(P)**, vecteur de l'espace vectoriel associé, est appelée champ de vecteurs.

2.2 - Champ de vecteurs *équiprojectif* :

Soit un espace affine de dimension 3 : $\mathcal{E}$
Soit un espace vectoriel associé de dimension 3 : E

Un champ de vecteur M qui, à tout point P de l'espace affine fait correspondre le vecteur **M(P)**, vecteur de l'espace vectoriel associé, et qui vérifie :

$$\forall P \in \mathcal{E},\ \forall Q \in \mathcal{E}, \qquad \mathbf{M(P)} = \mathbf{M(Q)} + \mathbf{PQ} \wedge \mathbf{R}$$

est un champ de vecteurs équiprojectif.

R s'appelle la résultante générale, elle ne dépend pas du point.

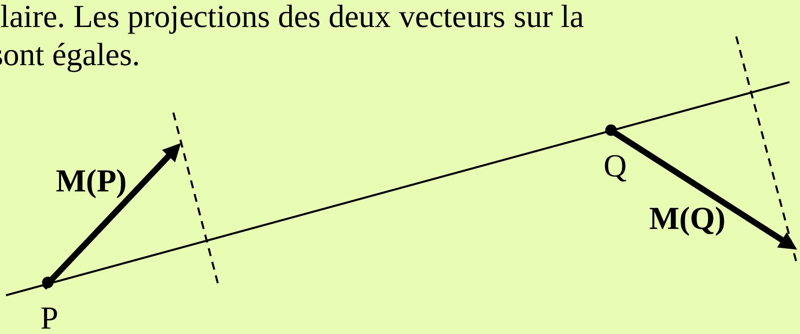
La relation d'équiprojectivité peut aussi s'écrire :

$\mathbf{M(P)} = \mathbf{M(Q)} + \mathbf{PQ} \wedge \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{M(P)} \bullet \mathbf{PQ} = \mathbf{M(Q)} \bullet \mathbf{PQ}$ facile à démontrer

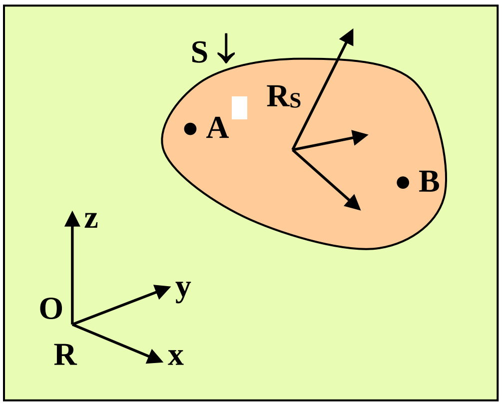
On admettra $\mathbf{M(P)} = \mathbf{M(Q)} + \mathbf{PQ} \wedge \mathbf{R} \Leftrightarrow \mathbf{M(P)} \bullet \mathbf{PQ} = \mathbf{M(Q)} \bullet \mathbf{PQ}$

Interprétation :

La projection orthogonale d'un vecteur sur une droite se traduit par le produit scalaire. Les projections des deux vecteurs sur la droite PQ sont égales.



2.3 - Champ des vecteurs vitesse des points d'un solide



Soient :

Un solide S, <u>indéformable</u>, en mouvement dans un repère R.

Un espace affine de dimension 3 défini par le repère R_S lié au solide S. Les points A et B appartiennent au solide (fixes/solide), donc au repère R_S.

Un espace vectoriel associé de dimension 3, l'ensemble des vecteurs vitesse des points appartenant au solide S, ou par extension au repère R_S.

Le champ des vecteurs vitesse des points d'un solide définit :

en A le vecteur $\mathbf{VA{\in}S/R}$ ou $\mathbf{VA{\in}R_S/R}$

en B le vecteur $\mathbf{VB{\in}S/R}$ ou $\mathbf{VB{\in}R_S/R}$

On peut montrer que $\mathbf{VA{\in}S/R \bullet AB = VB{\in}S/R \bullet AB}$ **(• se dit "scalaire")**

$$[d\mathbf{OB}/dt]_R \bullet \mathbf{AB} = [d(\mathbf{OA+AB})/dt]_R \bullet \mathbf{AB}$$
$$= [d\mathbf{OA}/dt]_R \bullet \mathbf{AB} + [d\mathbf{AB}/dt]_R \bullet \mathbf{AB}$$
$$= [d\mathbf{OA}/dt]_R \bullet \mathbf{AB} + [d\mathbf{AB}/dt]_{R_S} \bullet \mathbf{AB} + (\mathbf{\Omega\ R_S/R} \wedge \mathbf{AB}) \bullet \mathbf{AB}$$

or $A{\in}S$, $B{\in}S$ $\Rightarrow [d\mathbf{AB}/dt]_{R_S} = \mathbf{0}$ et $(\mathbf{\Omega\ R_S/R} \wedge \mathbf{AB}) \bullet \mathbf{AB} = 0$

On peut montrer que $\mathbf{VA{\in}S/R = VB{\in}S/R} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega\ S/R}$

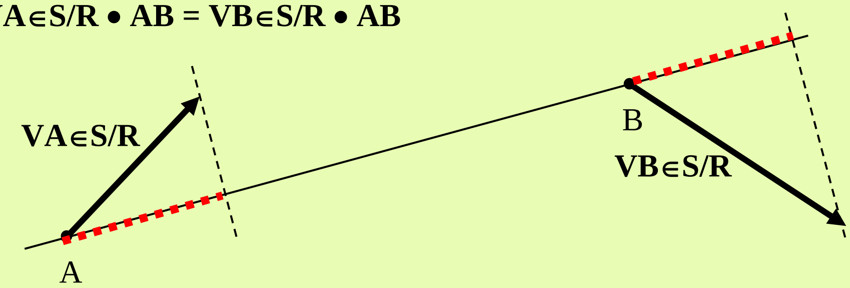
$$[d\mathbf{OA}/dt]_R = [d(\mathbf{OB+BA})/dt]_R$$
$$= [d\mathbf{OB}/dt]_R + [d\mathbf{BA}/dt]_R$$
$$= [d\mathbf{OB}/dt]_R + [d\mathbf{BA}/dt]_{R_S} + \mathbf{\Omega\ R_S/R} \wedge \mathbf{BA}$$
$$= [d\mathbf{OB}/dt]_R + [d\mathbf{BA}/dt]_{R_S} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega\ R_S/R}$$

or $A{\in}S$, $B{\in}S$ $\Rightarrow [d\mathbf{BA}/dt]_{R_S} = \mathbf{0}$

Le champ des vecteurs vitesse des points d'un solide est équiprojectif .
Si un solide S est en mouvement par rapport à R_0, pour $A{\in}S$ et $B{\in}S$:

$$\mathbf{VA{\in}S/R = VB{\in}S/R} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega\ S/R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{VA{\in}S/R \bullet AB = VB{\in}S/R \bullet AB}$$



Les entités vectorielles $\mathbf{VA{\in}S_1/S_2}$, $\Gamma\ \mathbf{A{\in}S_1/S_2}$, $\mathbf{\Omega S_1/S_2}$,… sont en caractères gras.

3 - Cinématique graphique :

Quand utilise-t-on les méthodes graphiques de cinématique ?

Une majorité de systèmes mécaniques sont plans, c'est à dire que les solides ont un plan de symétrie commun, que tous les vecteurs vitesse peuvent être ramenés dans le plan de symétrie, que tous les vecteurs rotations sont normaux ($\perp$) à ce plan de symétrie.

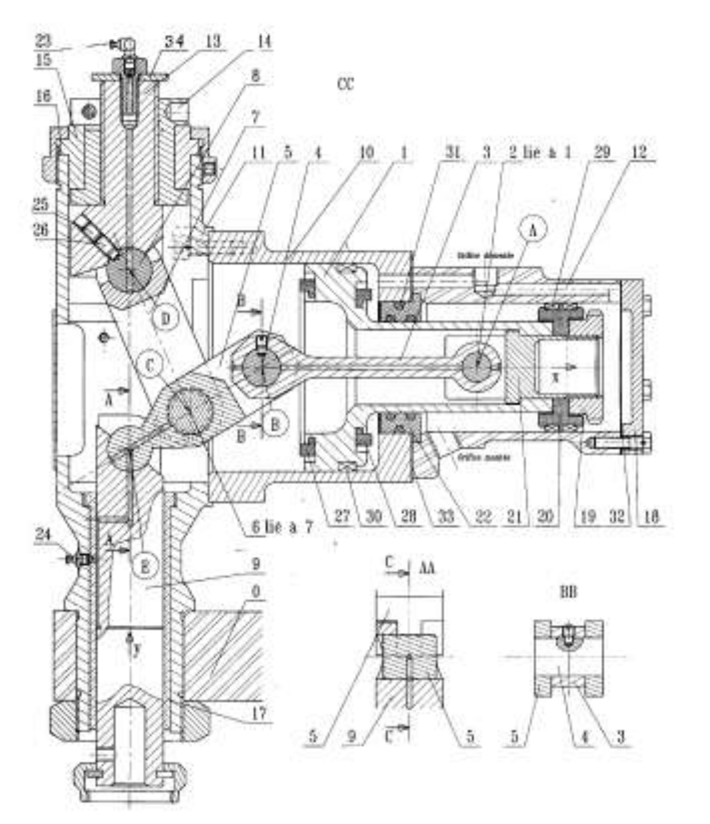
On peut alors modéliser le système comme étant autant de plans que de sous ensembles cinématiquement équivalents, qui glissent les uns sur les autres. On parle de mouvement plan sur plan. (on retrouve cette notion dans les logiciels de cinématique plane : mecaplan, DMT)

Les méthodes graphiques permettent de calculer les vitesses des points à l'instant t, dans une position définie, à partir des relations vues en cours de cinématique rationnelle, c'est à dire :

Equiprojectivité : $\mathbf{VA{\in}S/R \bullet AB = VB{\in}S/R \bullet AB}$
Transport ou distribution des vitesses : $\mathbf{VA{\in}S/R = VB{\in}S/R} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{\Omega\ S/R}$
Composition des vecteurs vitesse : $\mathbf{VP/R} = \mathbf{VP/S_1} + \mathbf{VP{\in}S_1/R}$ si P point d'un solide autre que point de contact ou P point de contact entre deux solides (cours numéro 2 de cinématique plane)
Composition des vecteurs vitesse : $\mathbf{VP{\in}S/R} = \mathbf{VP{\in}S\ /S_2} + \mathbf{VP{\in}S_2/R}$ (cours numéro 2)

Exemple

La presse à genouillère, représentée ci-contre, possède un plan de symétrie ; on peut étudier ce système selon un modèle plan. Tous les vecteurs vitesse sont dans le plan, tous les vecteurs rotation des solides sont perpendiculaires au plan.
On peut, dans plusieurs positions, sur le plan ou sur une épure, graphiquement, rechercher les vecteurs vitesse des différents points.



Les entités vectorielles $\mathbf{VA{\in}S_1/S_2}$, Γ $\mathbf{A{\in}S_1/S_2}$, $\mathbf{\Omega S_1/S_2}$,… sont en caractères gras.

3.1 - Méthodes de recherche de vecteurs vitesse.

311 Méthode basée sur la proportionalité de la norme du vecteur vitesse au rayon de la trajectoire du point.

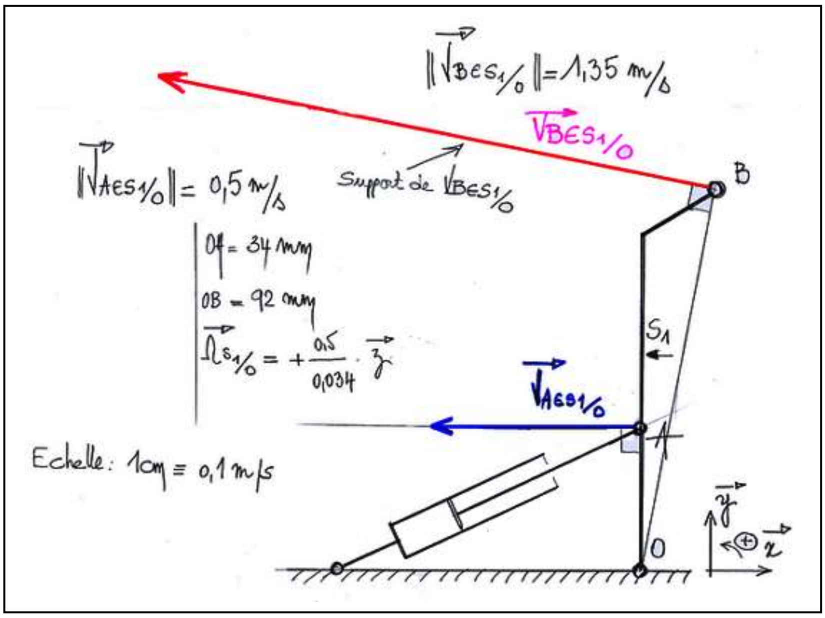
Soit un solide S_1 en mouvement plan, mouvement de rotation autour d'un axe fixe Oz.
Le vecteur vitesse de A dans son mouvement par rapport à S_0 ($\mathbf{VA \in S_1/S_0}$) est orthogonal à OA.
Le vecteur vitesse de B dans son mouvement par rapport à S_0 ($\mathbf{VB \in S_1/S_0}$) est orthogonal à OB.

Supposons que le vecteur vitesse de A dans son mouvement par rapport à S_0 ($\mathbf{VB \in S_1/S_0}$) soit connu.

On trace le support de $\mathbf{VB \in S_1/S_0}$ orthogonal à OB.

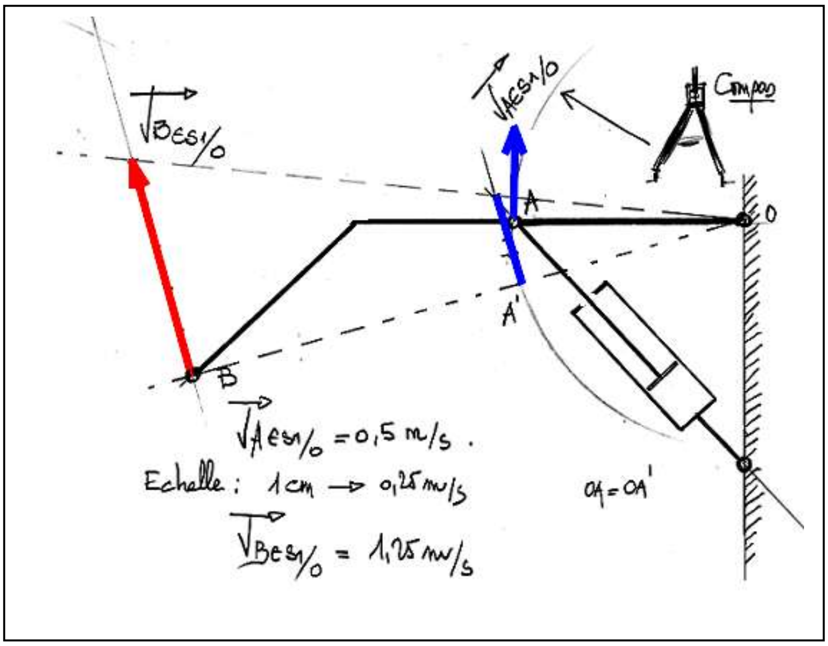
On mesure les rayons OA et OB.

La norme de $\mathbf{VA \in S_1/S_0}$ est égale à (OA/OB)*norme de $\mathbf{VB \in S_1/S_0}$.



On peut aussi utiliser le compas : le dessin ci-contre représente un autre solide S_1 en mouvement par rapport au bâti S_0.

On représente à l'échelle $\mathbf{VA \in S_1/S_0}$. Avec le compas, on reporte le rayon OA sur le segment OB, on obtient le point A' qui a la même vitesse (scalairement) que le point A. On trace à la même échelle le vecteur vitesse $\mathbf{VA' \in S_1/S_0}$. On joint l'extrémité de ce dernier au point O et on prolonge jusqu'à couper la perpendiculaire à OB en B.



On en déduit par mesure $\mathbf{VB \in S_1/S_0}$ puisque la norme du vecteur vitesse est proportionnelle au rayon de la trajectoire du point.

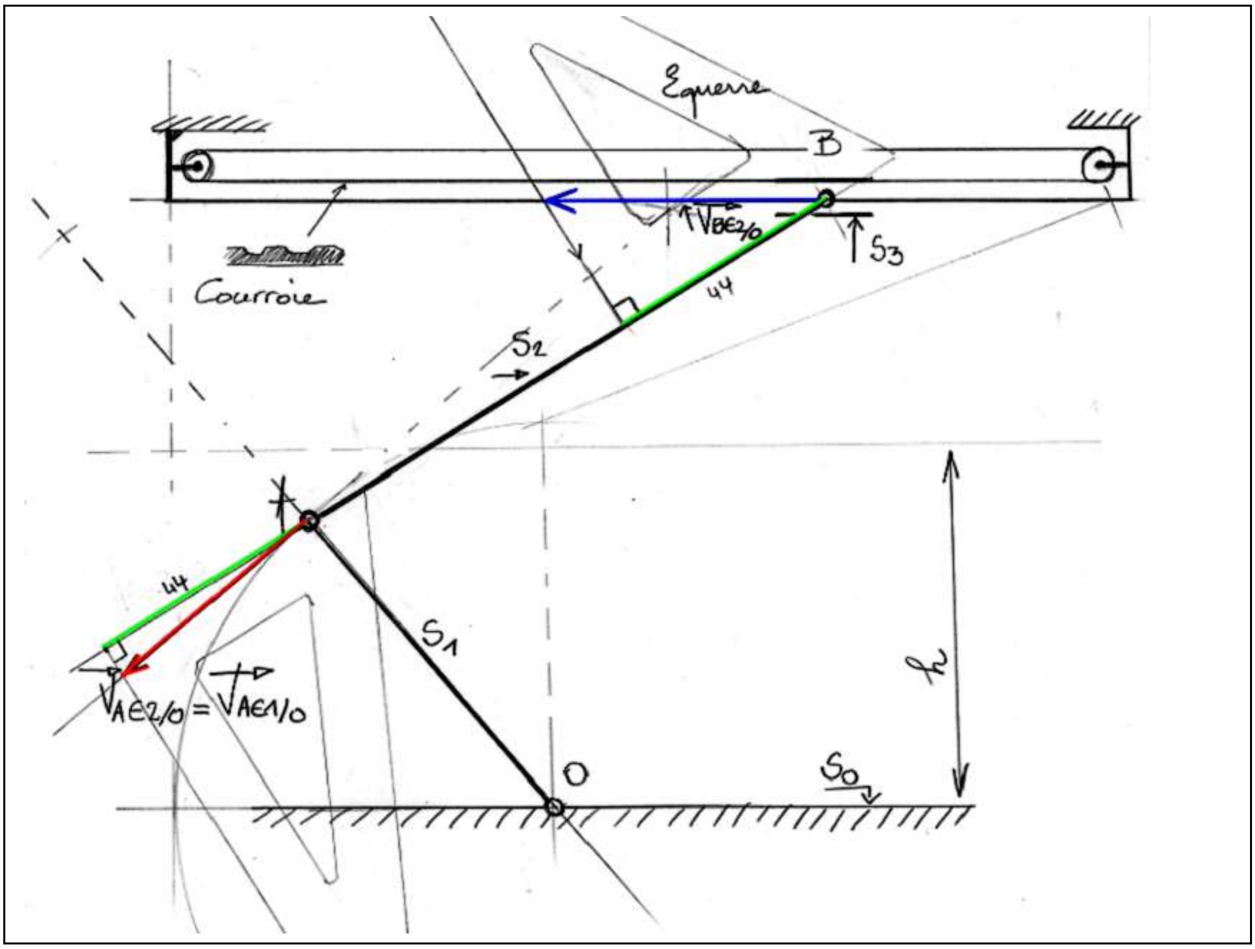
Les entités vectorielles $\mathbf{VA \in S_1/S_2}$, Γ $\mathbf{A \in S_1/S_2}$, $\Omega\mathbf{S_1/S_2}$,… sont en caractères gras.

312 Méthode basée l'équiprojectivité des vecteurs vitesse des points d'un solide.

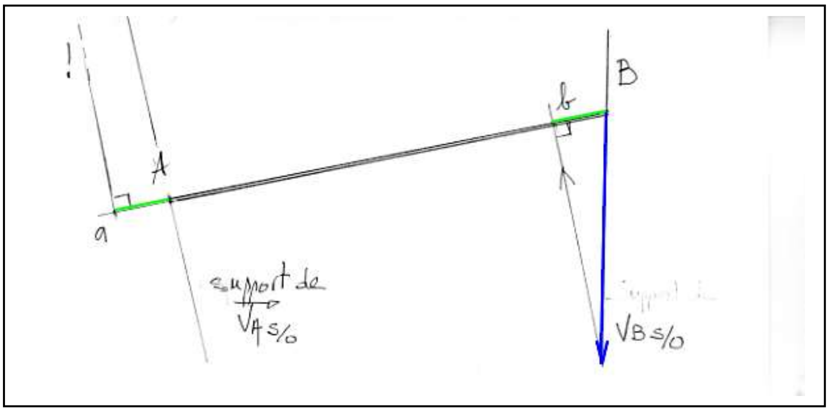
Le schéma ci-dessous représente le schéma d'un système d'ouverture de porte de garage. La courroie C, entraînée par un moteur, déplace le solide S_3 sur une trajectoire rectiligne horizontale. On trace à l'échelle **VB∈S1/S0**. Le solide S_2 qui représente la porte , est en mouvement plan. La barre S1 est en liaison pivot en O avec le bâti, on connait donc la direction du vecteur vitesse **VA∈S1/S0** , orthogonal à OA.

L'équiprojectivité des vecteurs vitesse de A et de B, appartenant tous deux au solide S_2 s'écrit : **VA∈S2/S0 • AB = VB∈ S2/S0 • AB**

On projette orthogonalement **VB∈ S2/S0** sur la droite AB, on reporte cette projection en A, on obtient alors le vecteur vitesse **VA∈S2/S0** dont la projection sur AB est connue et dont le support est connu.



Il se peut que cette méthode soit non utilisable ou imprécise, dans le cas où les vecteurs vitesse auraient des projections nulles ou presque nulles sur AB.



Les entités vectorielles **VA∈S1/S2**, **Γ A∈S1/S2**, **ΩS1/S2**,… sont en caractères gras.

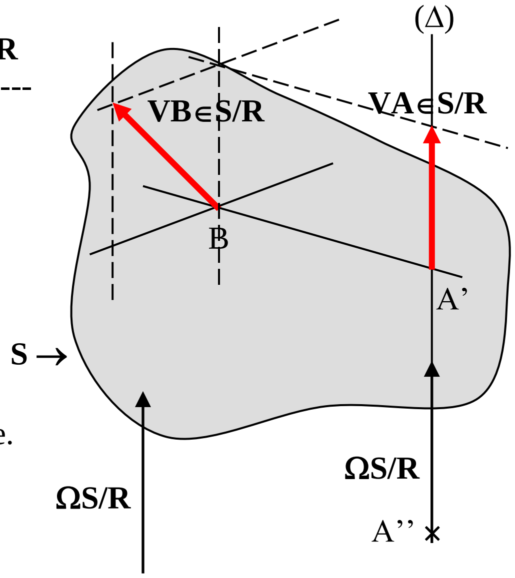
32 - Centre instantané de rotation

321 - Méthode :
Dans le cours nous avons recherché l'équation de l'axe instantané de rotation d'un solide en mouvement par rapport à un autre solide ou par rapport à un repère.

Pour un solide S, en mouvement dans un repère R, B∈S.
Le mouvement de ce solide est défini par les éléments de réduction en B de son torseur cinématique : { **ΩS/R** ; **VB∈S/R** }

Il existe des points appartenant au solide S ou au repère qui lui est lié R_S définis par la relation suivante :

$$\mathbf{AB} = \frac{\mathbf{V}_{B\in S/R} \wedge \mathbf{\Omega}_{S/R}}{\Omega^2_{S/R}} + \frac{(\mathbf{\Omega}_{S/R} \bullet \mathbf{AB}).\,\mathbf{\Omega}_{S/R}}{\Omega^2_{S/R}}$$



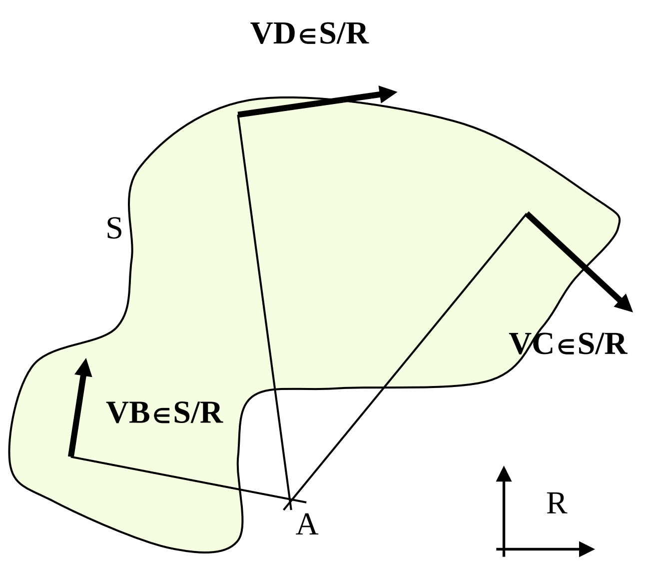
Soit la droite (Δ) = (A', **Ω S/R**)
A est quelque part sur la droite (Δ).
soit A'' ∈ (Δ)
VA''∈S/R = VA'∈S/R + A''A' ∧ Ω S/R
VA''∈S/R = VA'∈S/R

Tout point de la droite (Δ) a même vecteur vitesse.

Dans un mouvement plan sur plan, tous les vecteurs vitesse sont dans le plan, tous les vecteurs rotations sont orthogonaux au plan. Pour les vecteurs de l'encadré ci-dessus, **VB∈S/R** est dans le plan orthogonal à **ΩS/R**, **VA∈S/R** est nul.

Soit le solide S en mouvement plan par rapport à R. En connaissant la direction de **VB∈S/R**, on trouve la droite sur laquelle se situe A intersection du plan et de l'axe instantané de rotation de S par rapport à R.

En connaissant la direction de **VC∈S/R**, on trouve le point A, on l'appelle centre instantané de rotation (C.I.R). On peut appliquer alors les règles de calcul des vecteurs vitesse vues précédemment (équiprojectivité ou rayon de la trajectoire).



322 - Application à la presse à genouillère

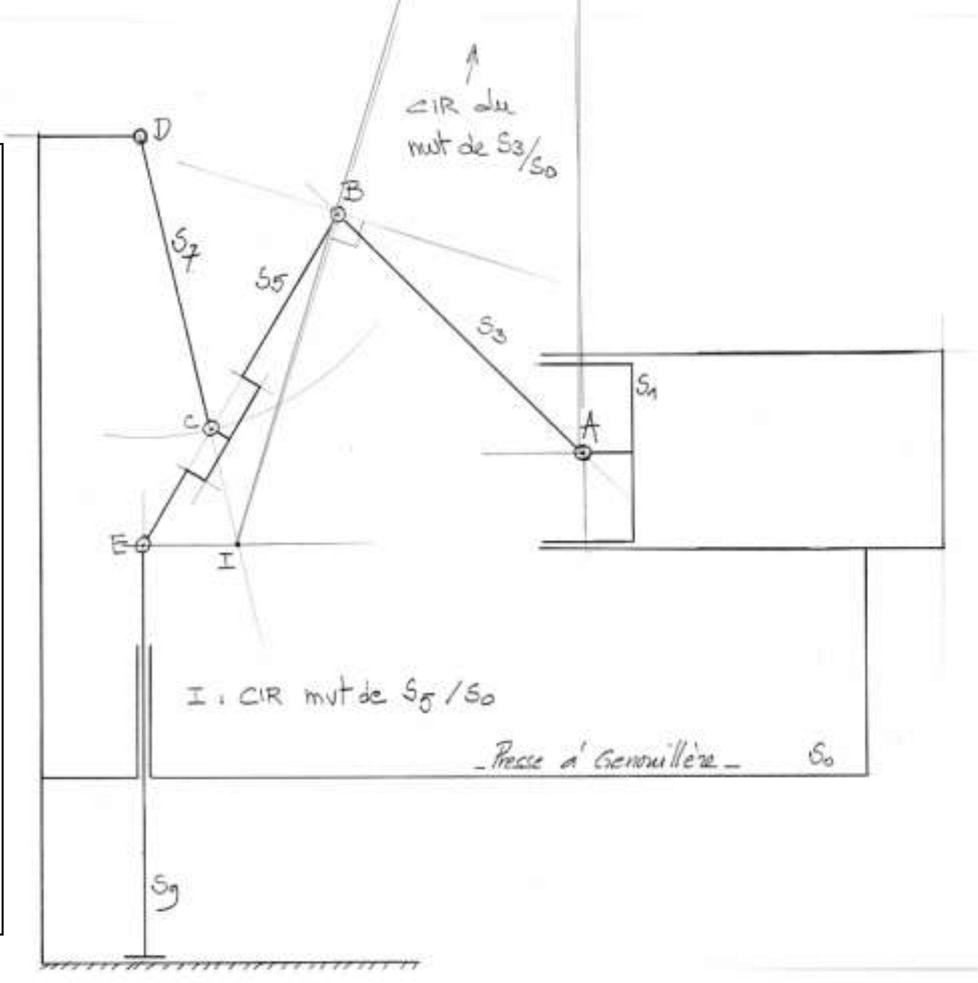
Le centre instantané de rotation du solide S_5 par rapport à S_0 se trouve en I. Pour le trouver, on trace en E une perpendiculaire à $\mathbf{VE\in S_5/S_0}$, on trace en C une perpendiculaire à $\mathbf{VC\in S_5/S_0}$; on obtient I. De ce fait, on connait le support de $\mathbf{VB\in S_5/S_0}$ perpendiculaire à IB.

Le centre instantané de rotation du solide S_3 par rapport à S_0 se trouve en J. Pour le trouver, on trace en A une perpendiculaire à $\mathbf{VA\in S_3/S_0}$, on trace en B une perpendiculaire à $\mathbf{VB\in S_5/S_0}$ (déjà tracée); on obtient J.

Connaissant $\mathbf{VA\in S_3/S_0}$ on en déduit $\mathbf{VB\in S_3/S_0}$.

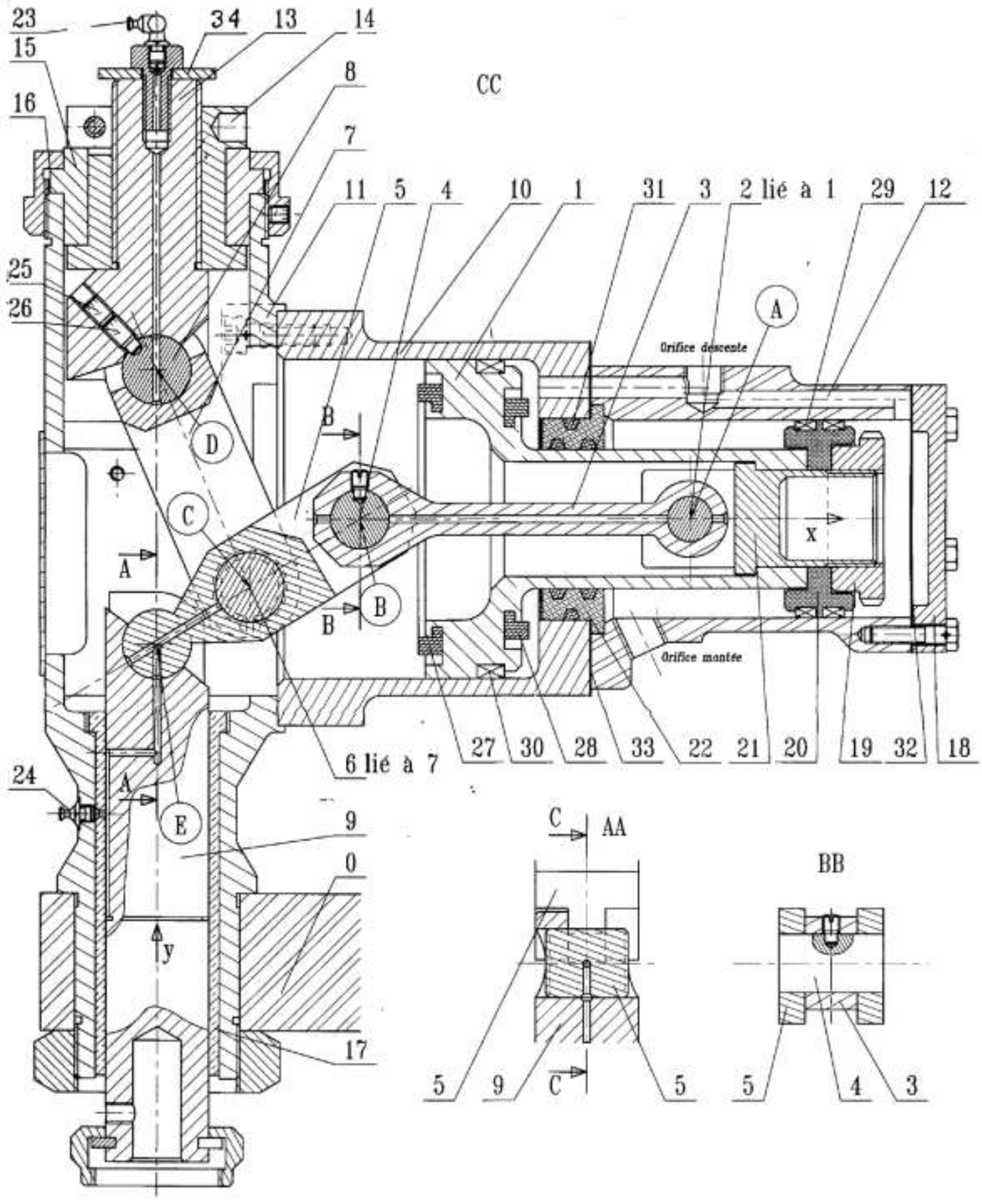
Et $\mathbf{VB\in S_3/S_0}$ = $\mathbf{VB\in S_5/S_0}$

Connaissant $\mathbf{VB\in S_5/S_0}$ on en déduit $\mathbf{VE\in S_5/S_0}$.



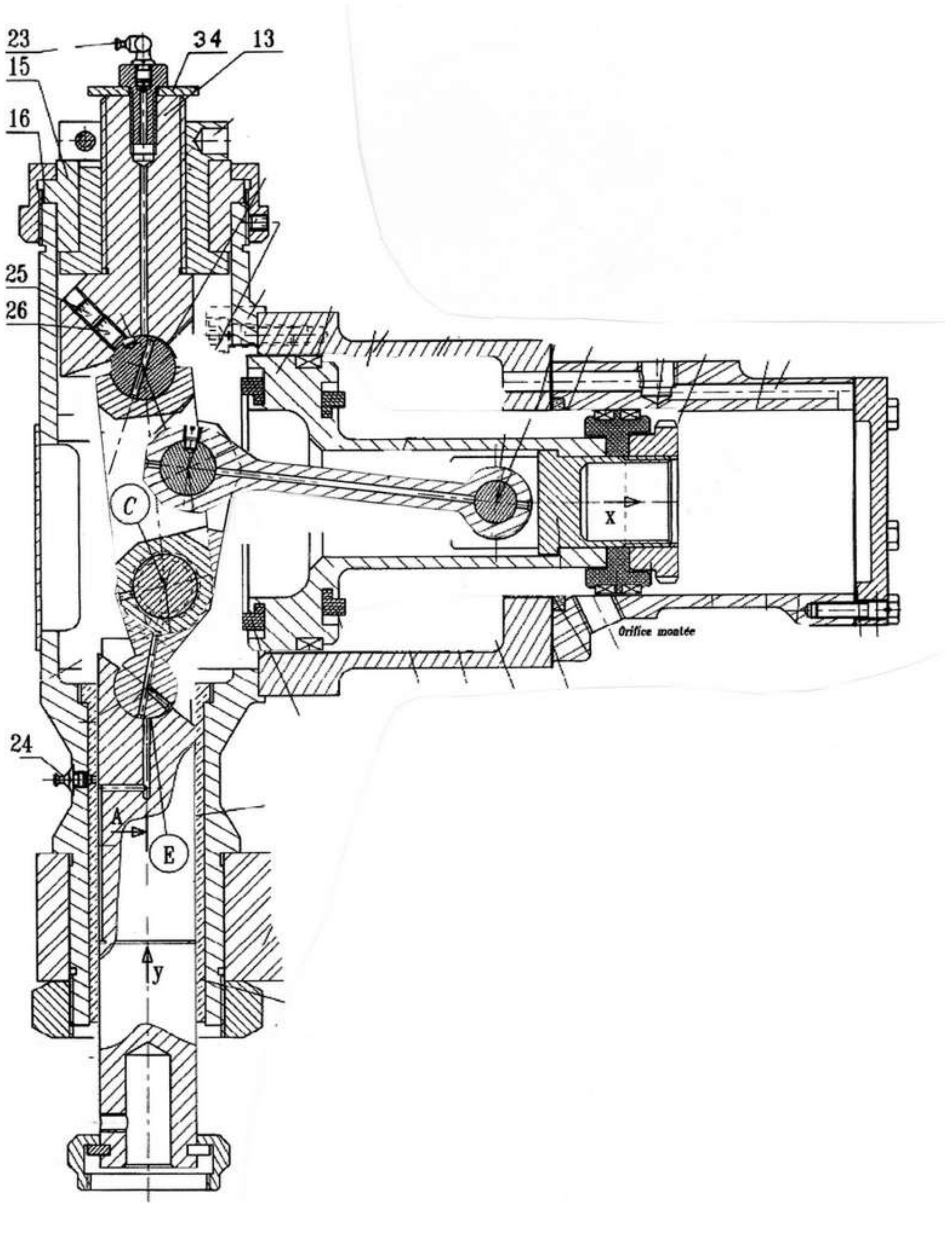
Les entités vectorielles $\mathbf{VA\in S_1/S_2}$, Γ $\mathbf{A\in S_1/S_2}$, $\Omega\mathbf{S_1/S_2}$,… sont en caractères gras.

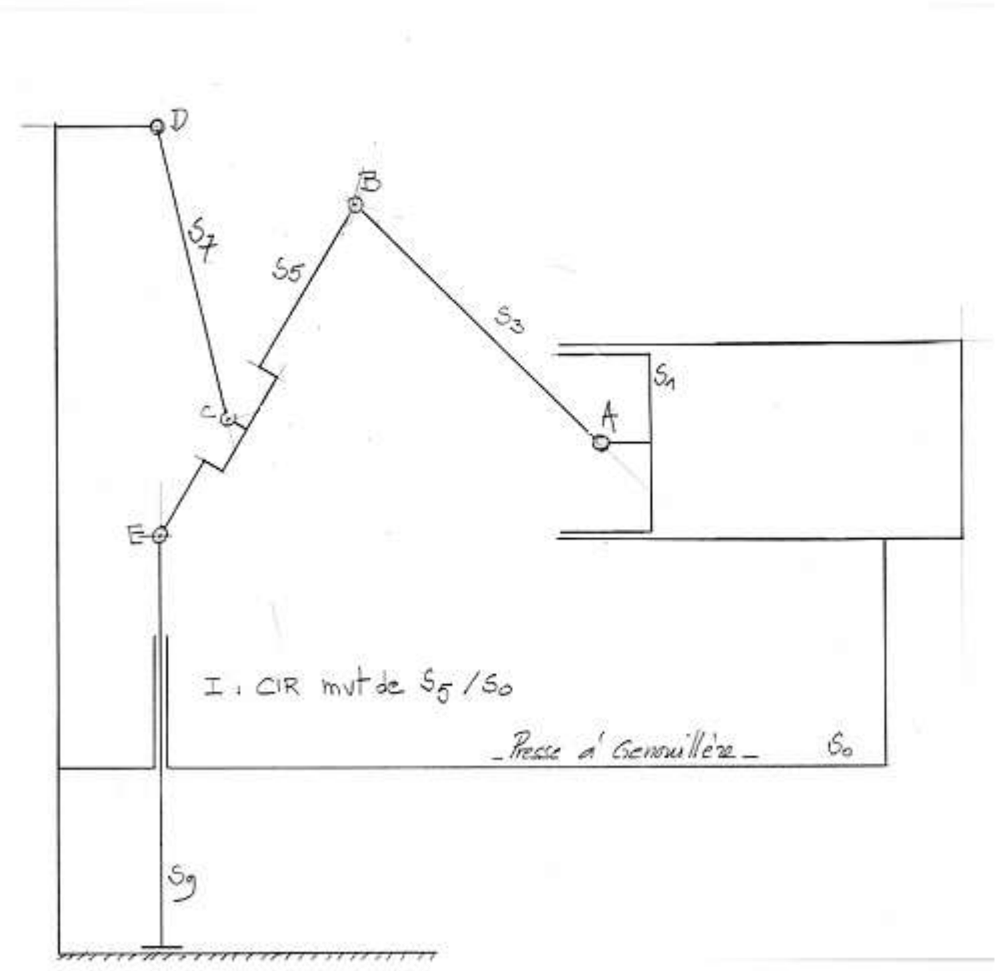
Exercice d'application : presse à genouillère.



Voici le plan d'ensemble d'une presse à genouillère.

- Déterminer la nature du mouvement de chaque solide par rapport au bâti.
- Etablir le schéma cinématique.
- Etablir la loi entrée sortie dans le cas ci-dessus et dans le cas ci-dessous.
- Quelle multiplication d'effort a-t-on dans chaque cas ?
- Application numérique : 6 bars dans le vérin, dessin à l'échelle 1/3.


23
34
13
15
16
25
26
C
x
Orifice montée
24
A
E
y



Les entités vectorielles **VA**$\in$**S**$_1$/**S**$_2$, Γ **A**$\in$**S**$_1$/**S**$_2$, Ω**S**$_1$/**S**$_2$,… sont en caractères gras.