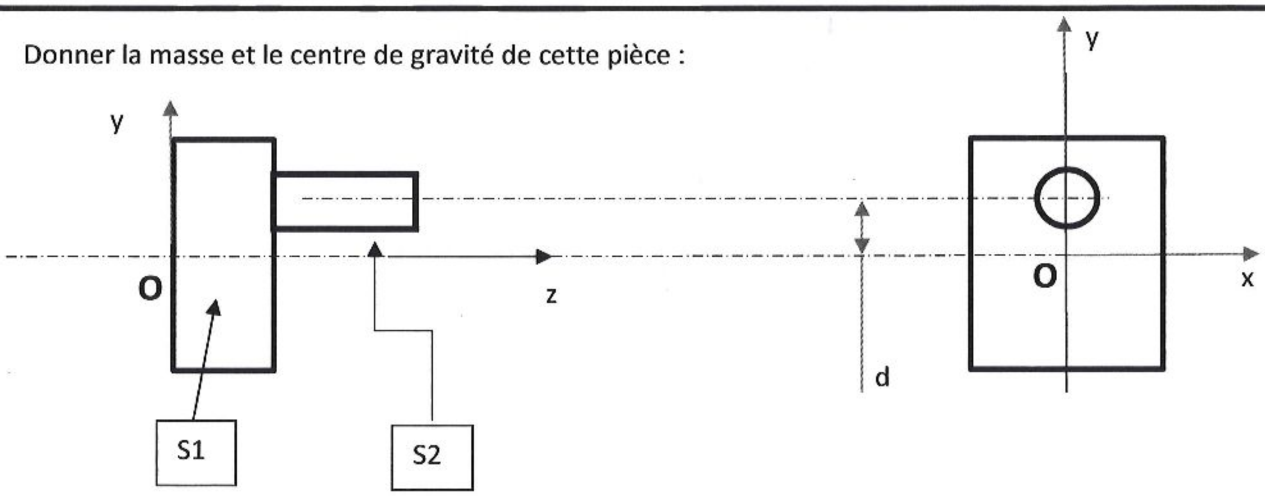
CM3 : CC1

Donner la masse et le centre de gravité de cette pièce :



Parallélépipède S1 : hauteur (y) =40mm ; largeur(**x**) = 30mm ;épaisseur(z) = 20mm
Cylindre S2 : L2 = 30 mm; D2=10mm
ρ = masse volumique = 7.8kg/dm^3 d=10 mm

Masse = $\rho v = \rho\,(h \times l \times e) + L_2 \pi \frac{D_2^2}{4} = 7{,}8\left(4 \times 3 \times 2 + 3\pi \frac{1^2}{4}\right)10^{-3} = 0{,}205\ \text{kg}$

$m_1 = 187{,}2\ g$ $m_2 = 18{,}38\ g$ $m = 205\ g$

Calcul les coordonnées du centre de gravité G :

$x_G = 0$ (symétrie)

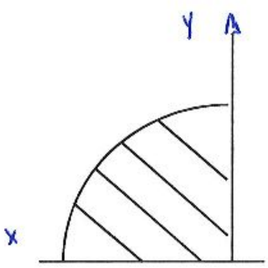
$y_G = \frac{1}{m}\left(0 + m_2 y_{G2}\right) = \frac{18{,}4}{205} \times 10 = 0{,}897$

$z_G = \frac{1}{m}\left(m_1 z_{G1} + m_2 z_{G2}\right) = \frac{1}{205}\left(187{,}2 \times 10 + 18{,}4 \times 35\right) = 12{,}3$

$12{,}27$

xG = 0 yG = $0{,}9$ zG = $12{,}3$

Déterminer, à l'aide du théorème de GULDIN, le centre de gravité d'un quart de disque de rayon R:



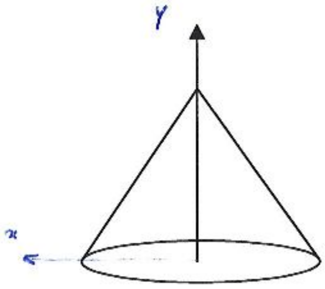
Symétrie $x_G = y_G$

Guldin $2\pi x_G \underset{(1/4\ \text{disque})}{S} = V_{(1/2\ \text{sphère})}$

$2\pi x_G \frac{\pi R^2}{4} = \frac{4}{3}\frac{\pi R^3}{2}$

$\Rightarrow x_G = \frac{4R}{3\pi}$

Déterminer, à l'aide du théorème de GULDIN, la surface supérieure du cône, de hauteur H et de rayon R :



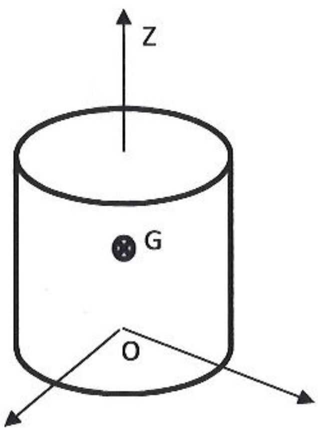
Rotation de la ligne / Y

$$2\pi x_G L = S$$

$$\cancel{2}\pi \frac{R}{\cancel{2}} \sqrt{R^2+H^2} = S$$

$$S = \pi R \sqrt{R^2+H^2}$$

Donner la matrice d'inertie d'un cylindre de masse M, de diamètre D et de hauteur H. en G centre de gravité en fonction de M, D, H.



$$I_{Gz} = \int (x^2+y^2)\,dm = \int r^2 dm = \rho \int r^3 dr\, d\theta\, dh$$

$$= \rho\, 2\pi H \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \rho\, 2\pi H \frac{R^4}{4}$$

avec $M = \rho \pi R^2 H$ on a $I_{Gz} = \frac{MR^2}{2} = \frac{MD^2}{8}$

$$I_{Gx} + I_{Gy} = \int (y^2+z^2)\,dm + \int (z^2+x^2)\,dm = \int (x^2+y^2)\,dm + 2\int z^2 dm$$

et $I_{Gx} = I_{Gy}$ (symétrie)

d'où $I_{Gx} = I_{Gy} = \frac{1}{2} I_{Gz} + \int z^2 dm$

Calcul de $\int z^2 dm$

$$\int z^2 dm = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r\,dr \int_{-H/2}^{H/2} z^2 dh = \rho\, 2\pi \frac{R^2}{2} \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-H/2}^{H/2}$$

$$= \rho\, 2\pi \frac{R^2}{2\times 3} \left(\frac{H^3}{8} - -\frac{H^3}{8}\right) = \rho \pi R^2 \frac{H^3}{12} = \frac{MH^2}{12}$$

d'où $I_{Gx} = I_{Gy} = \frac{MD^2}{16} + \frac{MH^2}{12}$

Les produits sont nuls par symétrie

$$\mathbb{I}_G = M \begin{vmatrix} \frac{D^2}{16}+\frac{H^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D^2}{16}+\frac{H^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D^2}{8} \end{vmatrix}$$

Puis en O (base du cylindre) :

$\vec{OG} = \frac{H}{2} \vec{z}$

$$\mathbb{I}_O = \mathbb{I}_G + M\,\mathbb{H}$$

avec $\mathbb{H} = \begin{vmatrix} \frac{H^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

d'où

$$\mathbb{I}_O = M \begin{vmatrix} \frac{D^2}{16}+\frac{H^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D^2}{16}+\frac{H^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D^2}{8} \end{vmatrix}$$

Cm3: Calculer le barycentre d'un solide avec Guldin ou sans et donner une matrice d'inertie d'un volume simple.

v	b	o	r

NOM : CORRIGE **Prénom :**