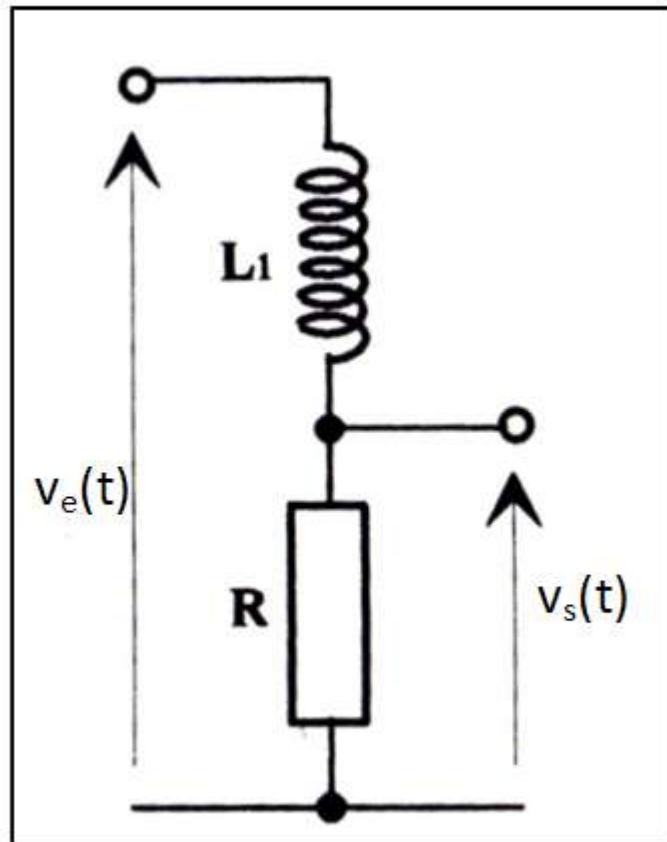


RESEAU PASSIF RL

Un **circuit RL** est un [circuit électrique](#) contenant une [résistance](#) et une [bobine](#) en série. On dit que la bobine s'oppose transitoirement à l'établissement du courant dans le circuit.



Les équations électriques sont :

$$v_s(t) = R i(t)$$

$$v_e(t) = v_s(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$$v_e(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$$V_e(p) = R I(p) + L p I(p)$$

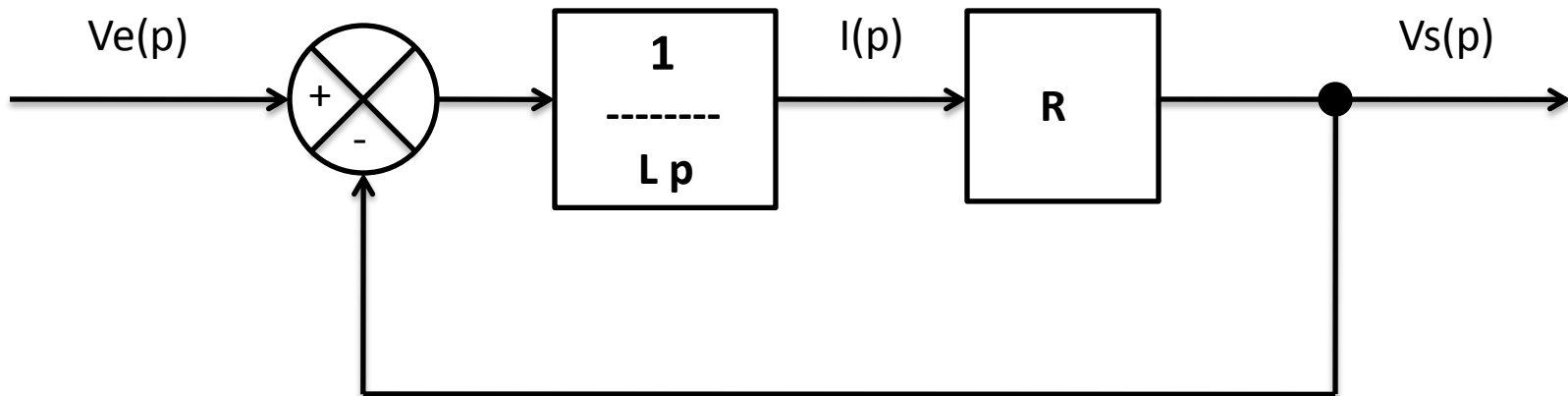
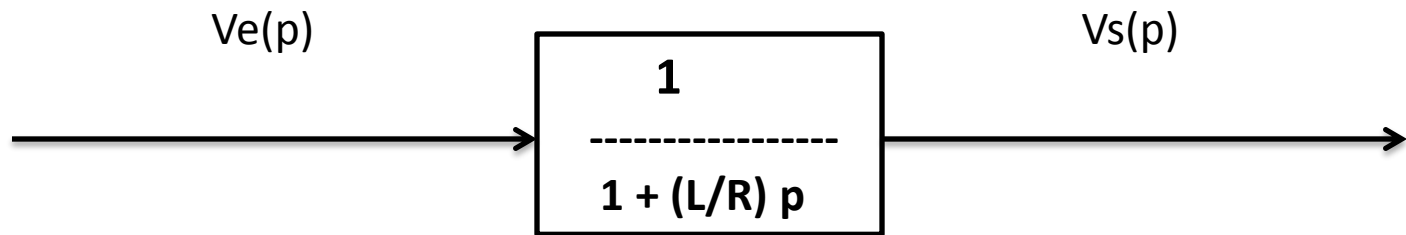
$$V_e(p) = (R + L p) I(p)$$

$$\frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{R I(p)}{(R + L p) I(p)} = \frac{1}{1 + (L/R) p}$$

$$v_e(t) = v_s(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$$V_e(p) - V_s(p) = L p I(p)$$

Schémas blocs



$$\begin{aligned} V_e(p) - V_s(p) &= L p I(p) \\ V_s(p) &= R I(p) \end{aligned}$$

Réponses temporelles à un échelon

$$\frac{\text{Forme canonique}}{1 + \tau p}$$

Calcul de la réponse temporelle à un échelon unitaire

La transformée de Laplace d'un échelon unitaire est : $1/p$

$$E(p) = 1/p$$

$$Vs(p) = E(p) H(p)$$

Décomposition en
éléments  simples

$$VS(p) = \frac{1}{p} \frac{K}{1+Tp} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+Tp}$$

On multiplie à gauche et à droite par p et on prend la valeur $p = 0$

$$\frac{\cancel{p}}{\cancel{p}} \frac{K}{1+Tp} = \frac{A \cancel{p}}{\cancel{p}} + \frac{B p}{1+Tp} \quad \Rightarrow \quad A = K$$

On multiplie à gauche et à droite par $(1+Tp)$ et on prend la valeur $p = -1/T$

$$\frac{1+Tp}{p} \frac{K}{1+Tp} = \frac{A (1+Tp)}{p} + \frac{B (1+Tp)}{1+Tp} \quad \Rightarrow \quad B = -KT$$

Réponses temporelles à un échelon

$$VS(p) = \frac{K}{p} - \frac{KT}{1 + Tp}$$

Il nous reste maintenant à rechercher l'original de $S(p)$ dans le domaine temporel $s(t)$:

$$VS(p) = \frac{K}{p} - \frac{K}{(1/T) + p} \quad \Rightarrow \quad vs(t) = K - K e^{-t/T} = K (1 - e^{-t/T})$$

Application numérique :

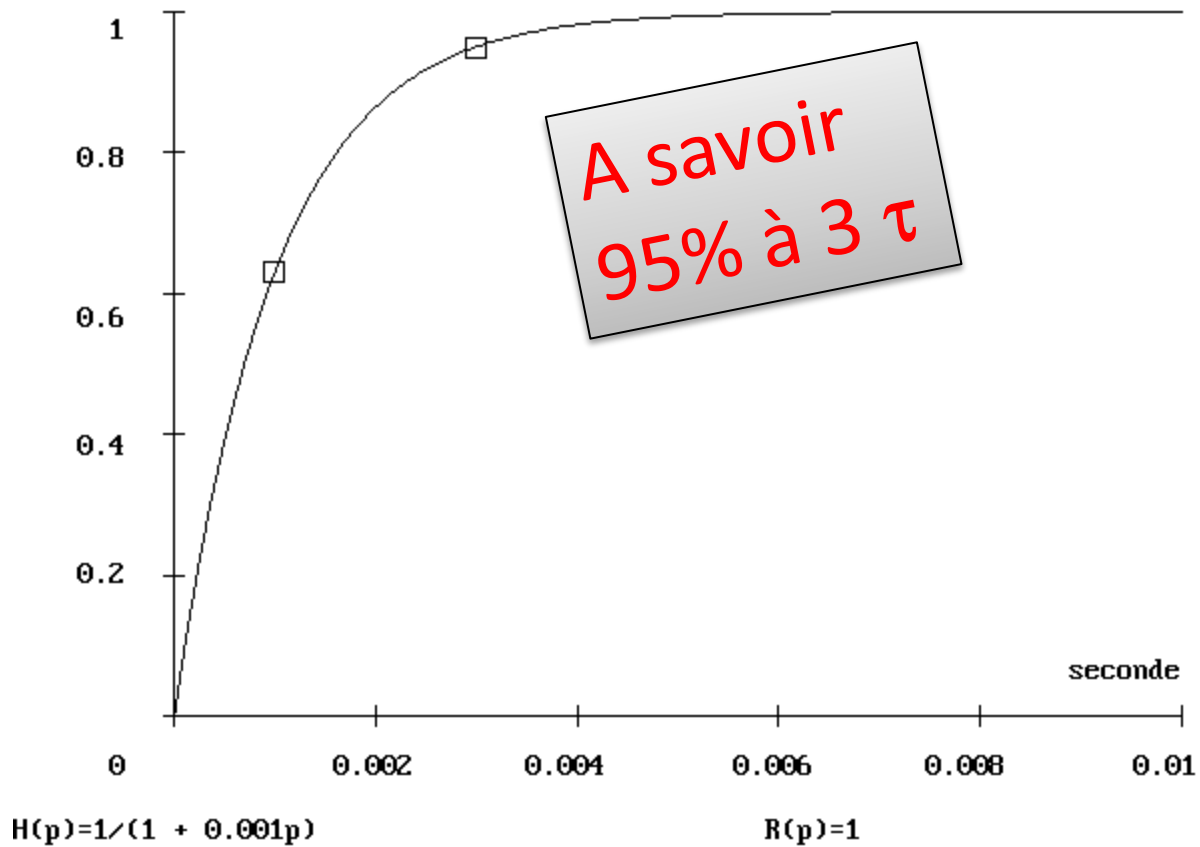
Echelon 24V

$$K = 1$$

$$T = L/R = 0,01/10 = 0,001 = 10^{-3} \text{ s}$$

$$vs(t) = 24 (1 - e^{-(R/L)t})$$

$t = 3 \text{ ms}$ $y = 0.95016$
 $t = 1 \text{ ms}$ $y = 0.63198$



Réponses harmoniques dans BODE, BLACK et NIQUIST

Représentation du signal de sortie : $|H(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi)$ dans le plan de **NIQUIST**
On représente le nombre complexe de module (ou gain) $|H(j\omega)|$ et d'argument φ

Si $e(t) = 1 \sin \omega t$ en volts

$$H(p) = \frac{K}{1 + T p} \quad \hookrightarrow \quad H(j\omega) = \frac{K}{1 + T j\omega}$$

Module de $H(j\omega)$

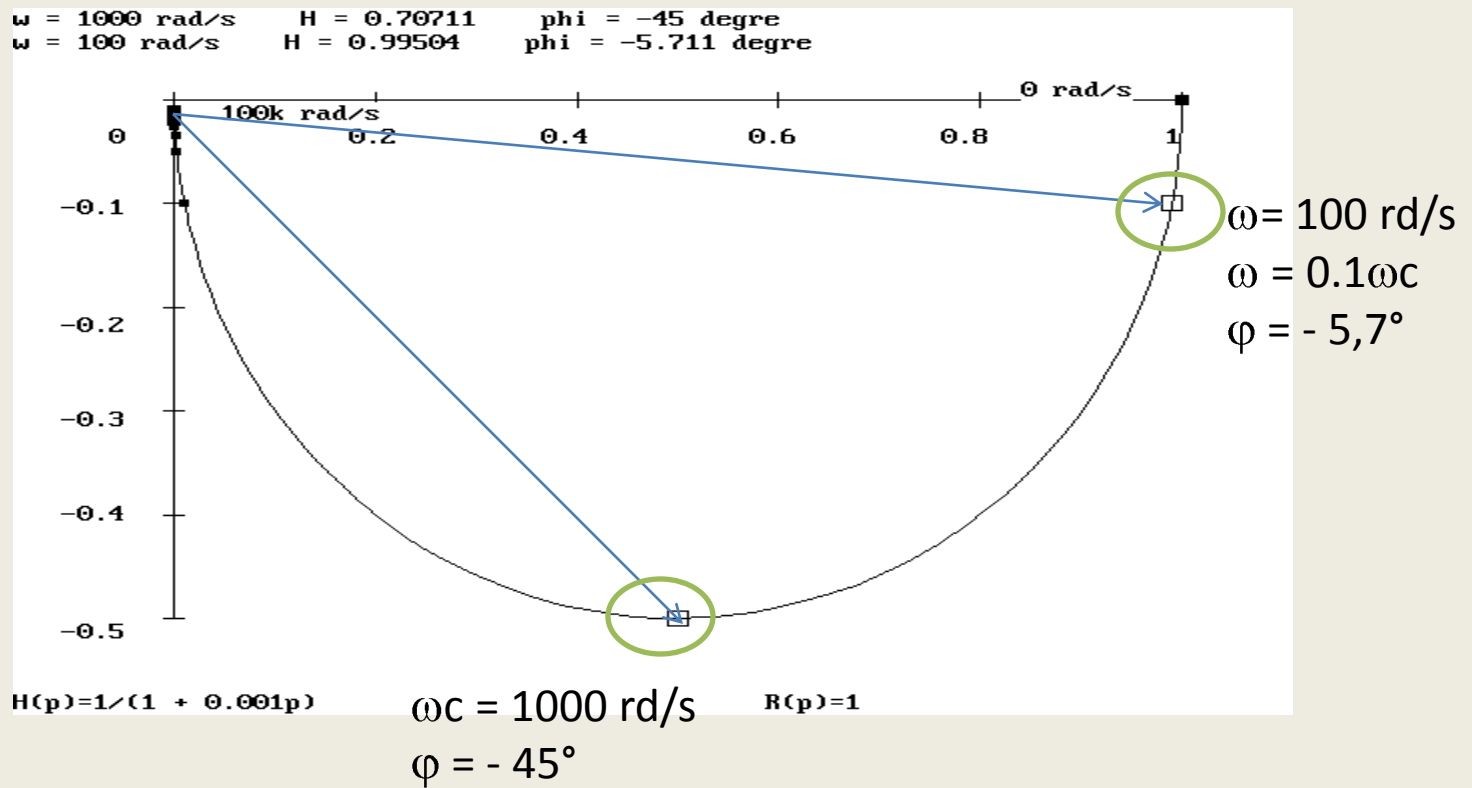
$$|H(j\omega)| = \frac{K}{(1 + T^2 \omega^2)^{1/2}} \quad (K \text{ que divise racine carrée de } 1 + T^2 \omega^2)$$

Argument de $H(j\omega)$

$$\text{Arg}(H(j\omega)) = - \arctan T\omega$$

$$\omega_c = 1000 \text{ rad/s}$$

$$\varphi = -84,3^\circ$$



Représentation du signal de sortie : $|H(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi)$ dans le plan de **BODE**

On trace le module $|H(j\omega)|$ en décibels et l'argument φ en degrés.

$$H(p) = \frac{K}{1 + T p} \quad \hookrightarrow \quad H(j\omega) = \frac{K}{1 + T j\omega}$$

Module de $H(j\omega)$

$$|H(j\omega)|_{\text{db}} = 20 \log K - 20 \log (1 + T^2 \omega^2)^{1/2} \quad (\text{laisser en } 20 \log)$$

Argument de $H(j\omega)$

$$\text{Arg}(H(j\omega)) = - \arctan T\omega$$

Recherche des asymptotes

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + T j\omega}$$

Module de $H(j\omega)$: $|H(j\omega)|_{db} = 20 \log K - 20 \log (1 + T^2 \omega^2)^{1/2}$

Le diagramme asymptotique des modules présente deux droites.

Si $\omega \ll 1/T$ alors $T^2 \omega^2$ négligeable devant 1 et $|H(j\omega)|_{db} = 20 \log K - 20 \log (1)^{1/2} = 20 \log K$
(essayez avec $\omega = 0,1 (1/T)$ ➡ droite horizontale.

Si $\omega \gg 1/T$ alors 1 négligeable devant $T^2 \omega^2$ et

$$|H(j\omega)|_{db} = 20 \log K - 20 \log (T^2 \omega^2)^{1/2}$$
$$|H(j\omega)|_{db} = 20 \log K - 20 \log (T\omega)$$

Calculons alors $|H(10j\omega)|_{db} - |H(j\omega)|_{db}$
 $20 \log K - 20 \log (10T\omega) - 20 \log K - 20 \log (T\omega) = -20 \log 10 = -20 \text{ db}$

Si $\omega = 1/T$ alors $|H(j\omega)|_{db} = 20 \log K - 20 \log (1) = 20 \log K$
Les asymptotes se coupent en $\omega = 1/T$.

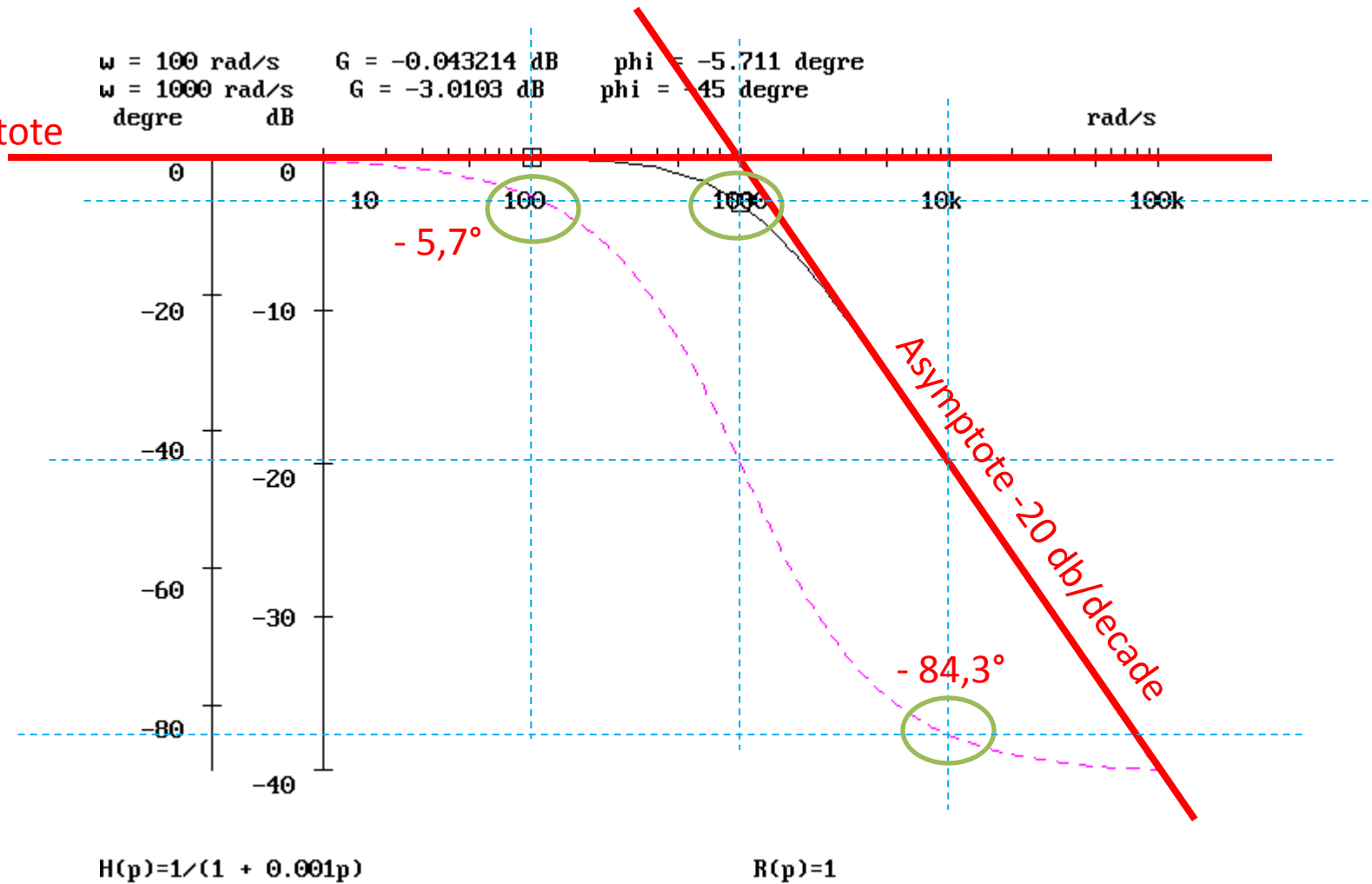
On raisonne de même pour l'argument de $H(j\omega)$

Si $\omega \ll 1/T$ alors $\arg(H(j\omega)) = 0$

Si $\omega \gg 1/T$ alors $\arg(H(j\omega)) = -90^\circ$

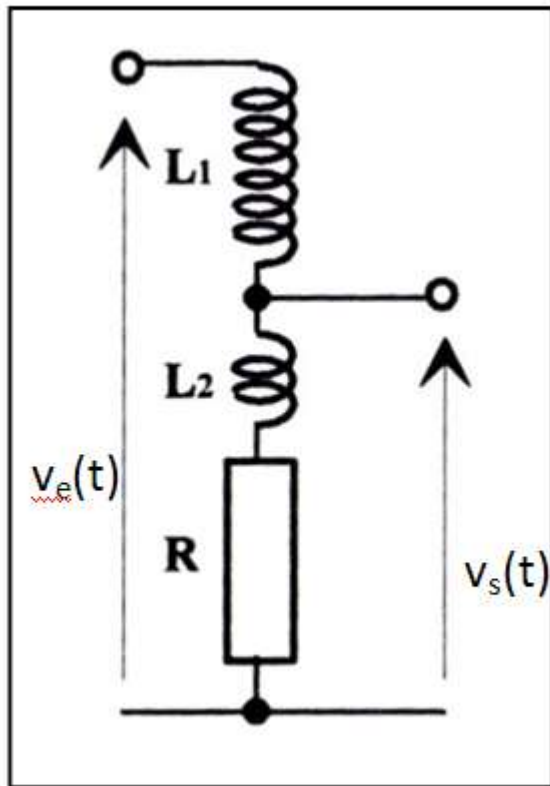
Si $\omega = 1/T$ alors $\arg(H(j\omega)) = -45^\circ$

asymptote



RESEAU PASSIF RL

Un **circuit RL** est un circuit électrique contenant une résistance et une bobine en série. On dit que la bobine s'oppose transitoirement à l'établissement du courant dans le circuit.



Les équations électriques sont :

$$v_s(t) = R i(t) + L_2 \frac{di(t)}{dt}$$

$$v_e(t) = R i(t) + L_2 \frac{di(t)}{dt} + L_1 \frac{di(t)}{dt}$$

$$v_e(t) = R i(t) + (L_2 + L_1) \frac{di(t)}{dt}$$

Dans le domaine de Laplace:

$$V_s(p) = R I(p) + L_2 p I(p)$$

$$V_e(p) = R I(p) + (L_2 + L_1) p I(p)$$

$$\frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{R + L_2 p}{R + (L_2 + L_1) p}$$

Etude d'un premier ordre généralisé

Forme canonique :

$$H(p) = \frac{K (1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)}$$

Mettons sous forme canonique :

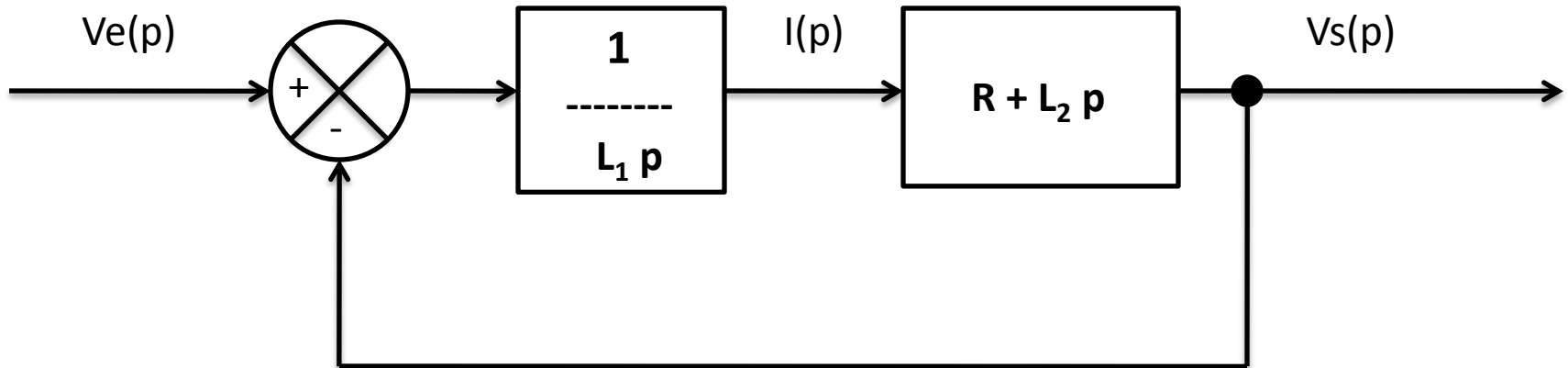
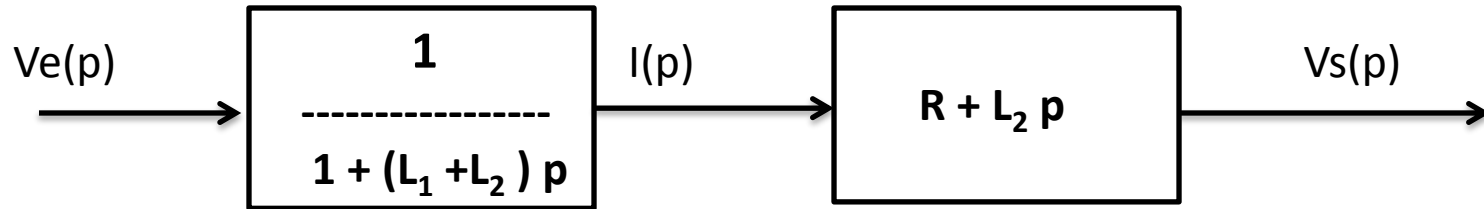
$$\frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{R + L_2 p}{R + (L_2 + L_1) p}$$

$$K = 1$$

$$\tau_1 = L_2 / R$$

$$\tau_2 = (L_2 + L_1) / R$$

Schémas blocs



Réponse temporelle

Echelon 24V

En décomposant en éléments simples, pour un échelon unitaire :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) \quad \text{avec} \quad E(p) = 1/p$$

$$S(p) = \frac{K (1 + \tau_1 p)}{p (1 + \tau_2 p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(1 + \tau_2 p)}$$

En multipliant $S(p)$ par p et en prenant $p = 0$, on trouve $A = K$

En multipliant $S(p)$ par $(1 + \tau_2 p)$

et en prenant $p = -1/\tau_2$, on trouve $B = \tau_1 - \tau_2$

$$s(t) = K \left(1 + (\tau_1 - \tau_2)/\tau_2 \right) e^{-(t/\tau_2)}$$

Si $E_0 = 24$ volts (échelon de 24 volts), $K=1$, $\tau_1 = L_2 / R$, $\tau_2 = (L_2 + L_1) / R$

$$s(t) = E_0 \left(1 - (L_1 / (L_2 + L_1)) \right) e^{-(R/(L_2 + L_1))t}$$

Réponse temporelle

Echelon 24V

Application numérique :

$$s(t) = K (1 + (\tau_1 - \tau_2)/\tau_2) e^{-(t/\tau_2)}$$

Si $E_0 = 24$ volts (échelon de 24 volts), $K=1$, $\tau_1 = L_2 / R$, $\tau_2 = (L_2 + L_1) / R$

$$s(t) = K E_0 (1 - (L_1 / (L_2 + L_1))) e^{-(R/(L_2 + L_1))t}$$

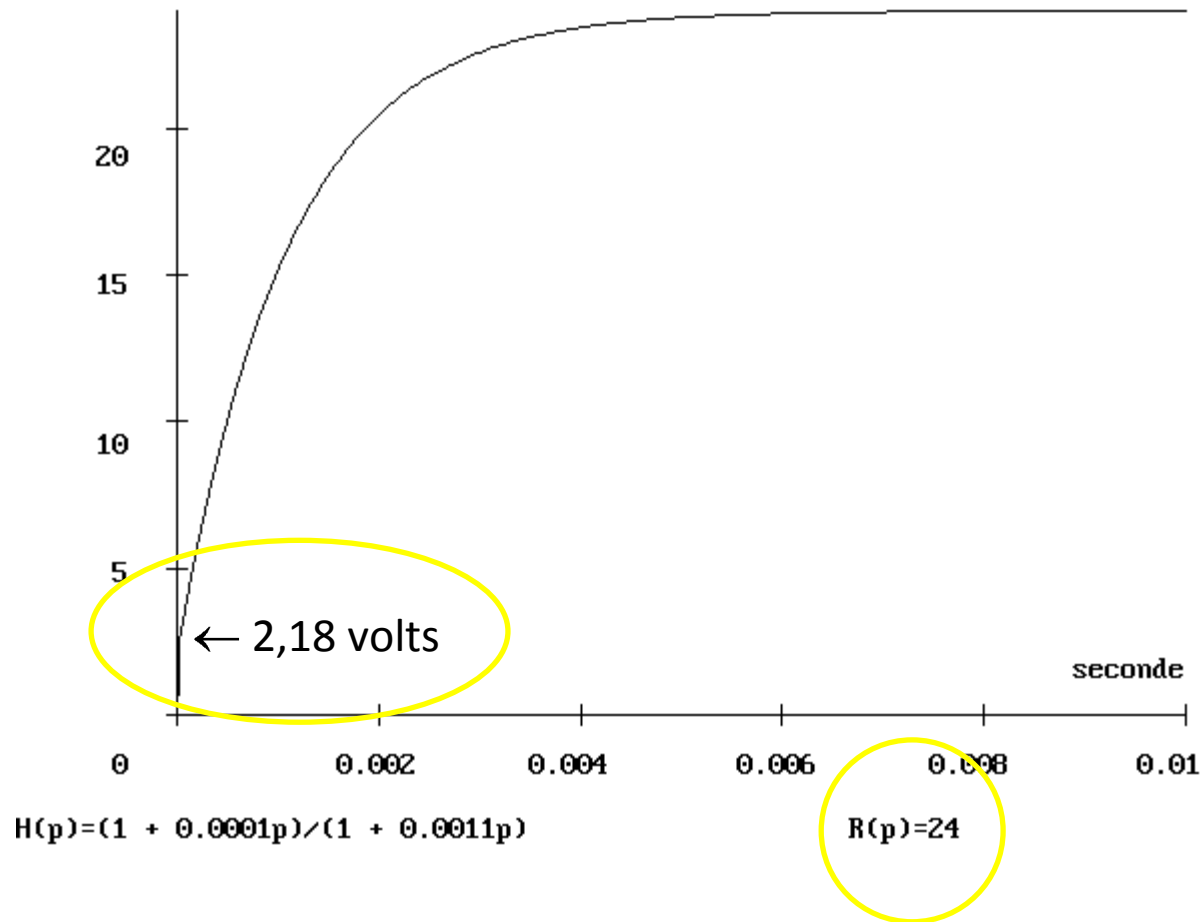
$$s(t) = 24 (1 - 0,9091 e^{-909,1 t})$$

Si t tend vers 0, alors $s(t)$ tend vers 2,18 volts

Si t tend vers l'infini, alors $s(t)$ tend vers 24 volts

Réponse à un échelon de 24 fois l'échelon unitaire

REPONSE ECHELON UNITAIRE en B.O.



Théorème de la valeur initiale

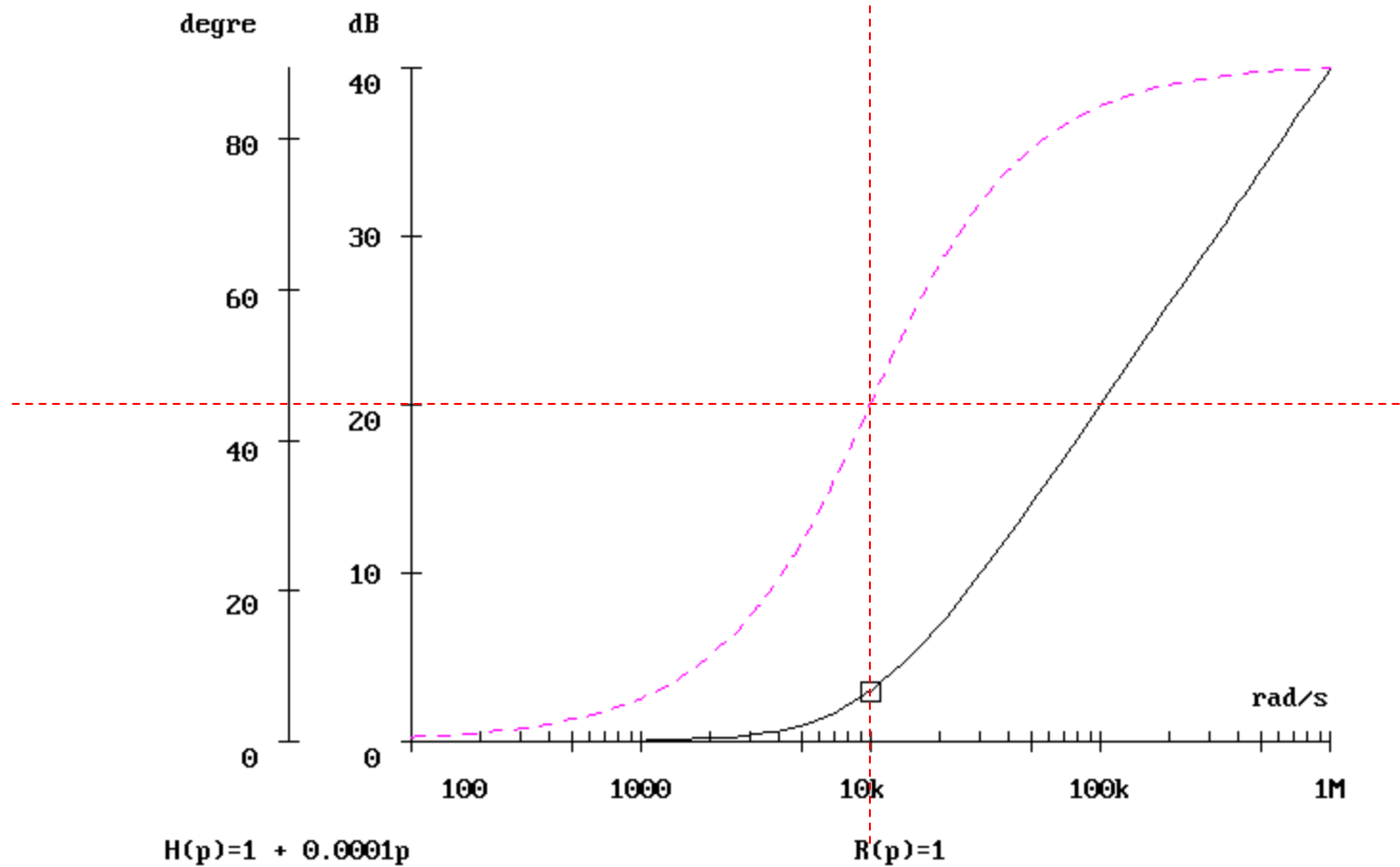
$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p S(p)$$

$$p S(p) = \frac{E_0 K (1 + \tau_1 p)}{1 + \tau_2 p}$$

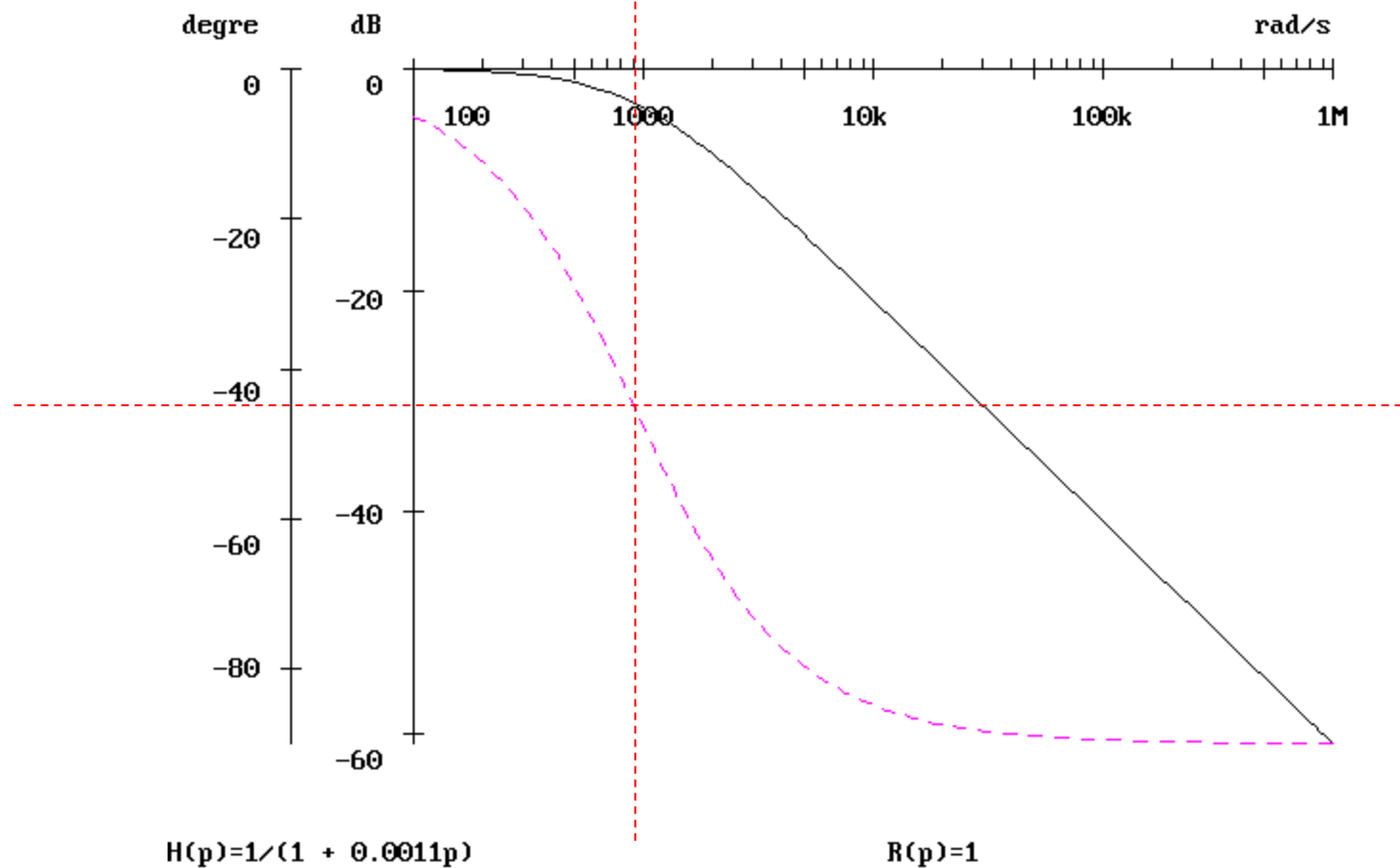
Si p tend vers l'infini, 1 devient négligeable devant $\tau_1 p$ et $\tau_1 p$

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p S(p) = E_0 K (\tau_1 / \tau_2) = 24 (L_2 / L_1 + L_2) = 2,18 \text{ Volts}$$

$\omega = 10 \text{ krad/s}$ $G = 3.0103 \text{ dB}$ $\phi = 45 \text{ degree}$

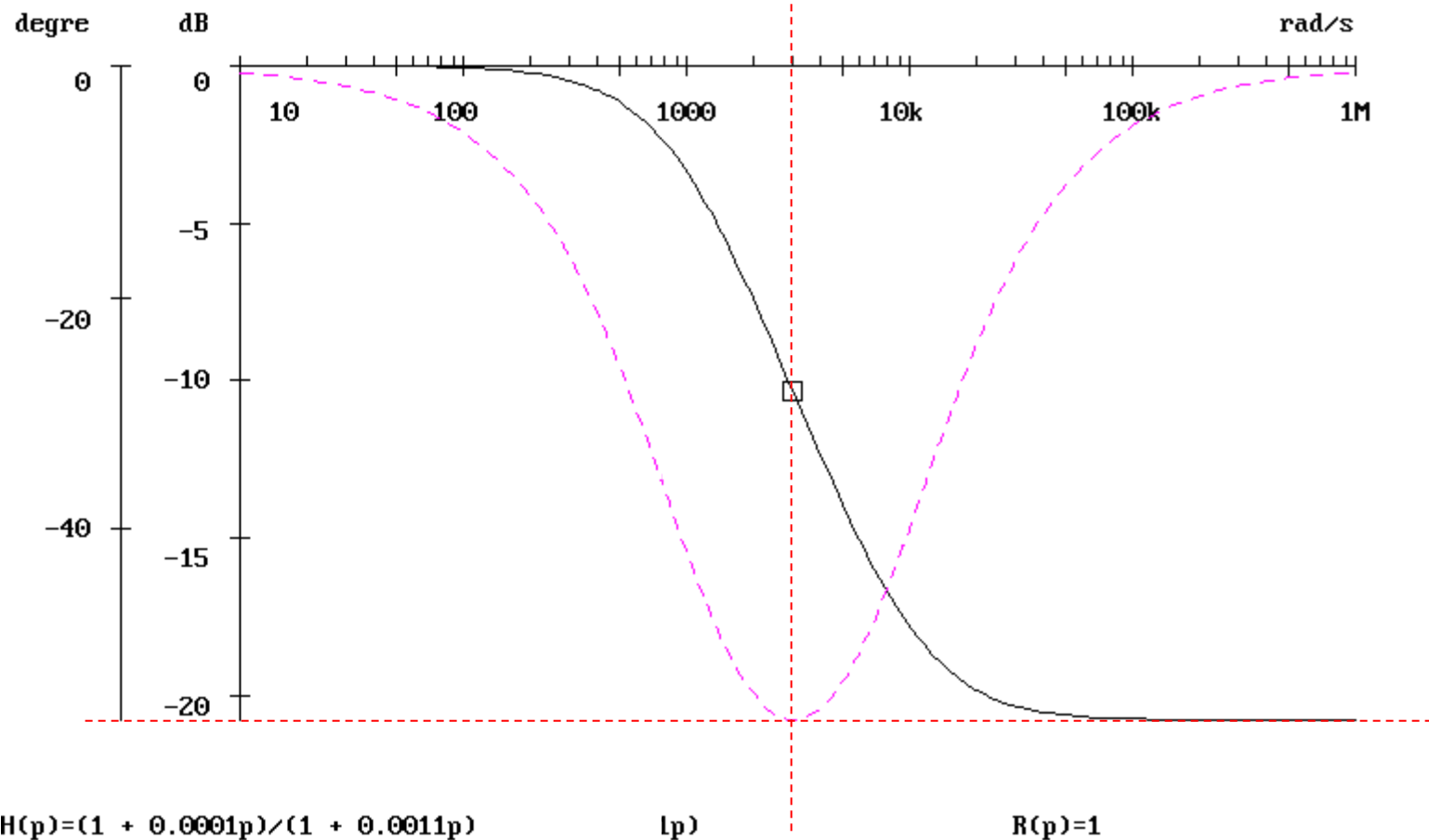


PLAN de BODE - phase en pointille



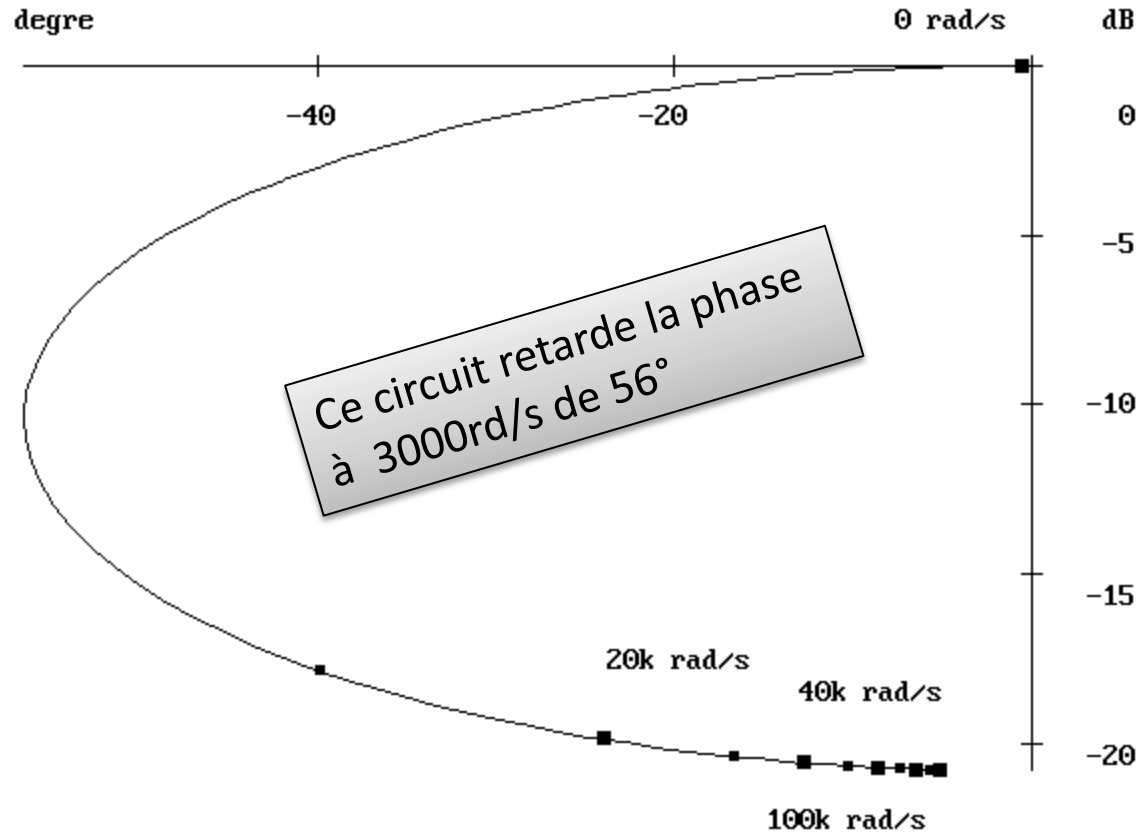
PLAN de BODE

$\omega = 3000 \text{ rad/s}$ $G = -10.378 \text{ dB}$ $\phi = -56.44 \text{ degree}$



PLAN de BLACK

DOSBox 0.65, Cpu Cycles:



$$H(p) = (1 + 0.0001p) / (1 + 0.0011p)$$

$$R(p) = 1$$

PLAN de BLACK

DOSBox 0.65, Cpu Cycles: 30

