La fonction de transfert H(jω) d'un système quelconque est un nombre complexe. Nous disposons de trois principaux modes de représentation : le plan de BODE, le plan de BLACK, et le plan de NIQUYST.

Le plan de BODE :

Le module de H(jω) se calcule en décibels. Le décibel est une échelle logarithmique définie de la façon suivante :

$$U_{dB} = 20 \log U$$

Le module de la fonction de transfert s'exprime comme le rapport du module de la tension de sortie sur le module de la tension d'entrée du système considéré :

$$H_{dB} = 20 \log (\text{amplitude}V_s/\text{amplitude}V_e)$$

L'argument se calcule de façon habituelle, s'appelle le déphasage, se calcule en degrés :

$$\varphi = \arg H(j\omega)$$

La représentation dans le plan de BODE se traduit par deux courbes superposées :

- une courbe représentant le module en dB de H(jω)
- une courbe représentant l'argument de H(jω)

On porte en abscisse log ω ce qui revient à placer ω sur une échelle logarithmique.

On utilise du papier semi log.

Voir figure 1 un exemple.

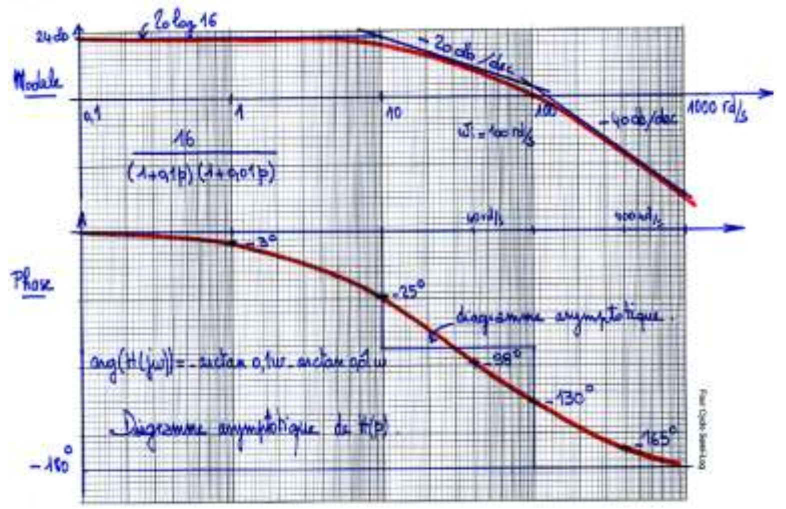


Figure 1 – Diagramme de BODE d'un deuxième ordre

Module et argument d'une fonction de transfert du premier ordre :

Prenons comme fonction de transfert $H_1(p) = 5/(1 + 0{,}04\ p)$

$K/(1 + \tau\ p)$est de la forme canonique d'un premier ordre.

$H(j\omega) = K/(1 + \tau j\omega)$

Module $|H_1(j\omega)|_{dB} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \tau^2\ \omega^2}$

Argument $\varphi = - \arctan \tau\omega$

<u>Représentation asymptotique de la fonction de transfert K/ (1+τp) dans le plan de</u>

<u>Module</u> $|H_1(j\omega)|_{dB} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}$

On se réfère à la valeur particulière appelée pulsation de coupure $\omega_c = 1/\tau$

Si $\omega \to 0$, $|H_1(j\omega)|_{dB} \to 20 \log K$

Si $\omega << \omega_c$ du genre 10 fois plus petit (une décade), $\tau^2\omega^2 << 1$ et $|H_1(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log K$ et la courbe suit donc une asymptote horizontale à 20 log K.

Si $\omega >> \omega_c$ du genre 10 fois plus grand (une décade), $\tau^2\omega^2 >> 1$ et $|H_1(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log K - 20$ dB

Si $\omega \to \infty$, $|H_1(j\omega)|_{dB} \to 20 \log K - 20 \log \tau\omega$

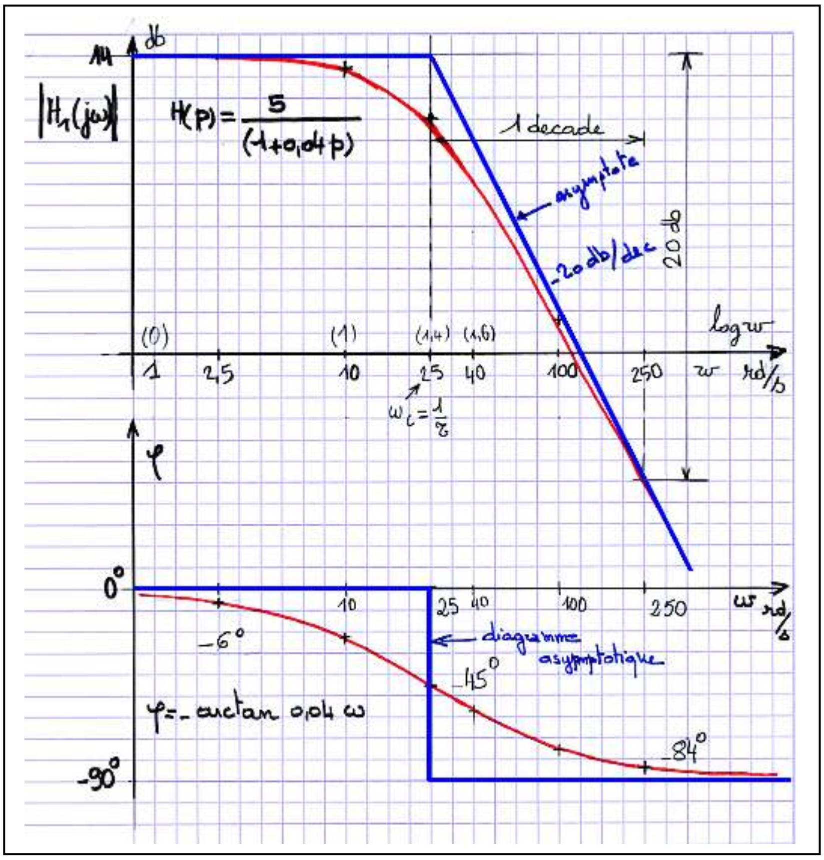
Pente de l'asymptote :
Calculons : $|H_1(j10\omega)|_{dB} - |H_1(j\omega)|_{dB} = 20 \log K - 20 \log \tau 10\omega - 20 \log K + 20 \log \tau\omega = -20$ dB

La courbe suit donc une asymptote définie par un point ($\omega_c = 1/\tau$, $|H_1(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log K$) et qui <u>décroît</u> de <u>20 db/décade</u>.

On peut tracer quelques points pour plus de précision si nécessaire :
Si $\omega = \omega_c$, $\tau^2\omega^2 = 1$ et $|H_1(j\omega)|_{dB} = 20 \log K - 20 \log 2 = 20 \log K - 3$ dB.
Pour $0,1\ \omega_c$, on calcule $|H_1(j\omega)|_{dB}$, pour $10\ \omega_c$, on calcule $|H_1(j\omega)|_{dB}$

<u>Argument</u> $\varphi = -\arctan \tau\omega$
Pour $0,1\ \omega_c$, on a $\varphi = -5,7$ °, pour $10\ \omega_c$, on a $\varphi = -84,3$ °

On trace alors le diagramme asymptotique (bleu) et le diagramme approché (rouge).



Représentation asymptotique d'une fonction de transfert avec intégrateur pur K/p

Prenons comme fonction de transfert $H_2(p) = 8/p$

$H_2(p)$ est de la forme K/p, $H_2(j\omega) = K/j\omega$

Module $|H_2(j\omega)|_{dB} = 20 \log K - 20 \log \omega$

Argument $\varphi = - \arctan \infty = - 90°$

<u>Représentation asymptotique de la fonction de transfert dans le plan de BODE.</u>

<u>Module</u> $|H_2(j\omega)|_{dB} = 20 \log K - 20 \log \omega$ est une droite

Si $\omega \rightarrow 0$, $|H_2(j\omega)|_{dB} \rightarrow + \infty$

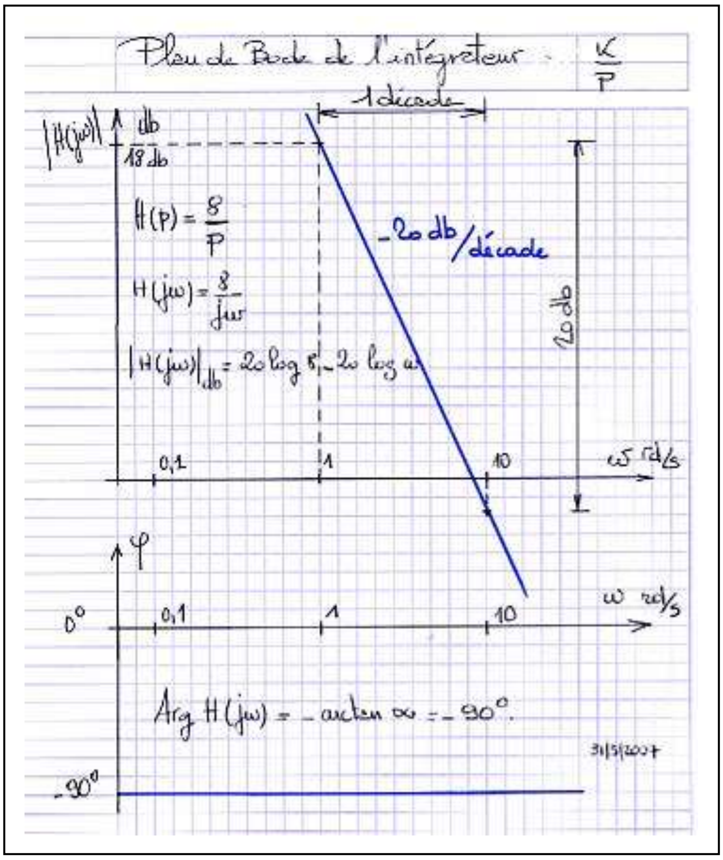
Si $\omega = 1$ $|H_2(j\omega)|_{dB} = 20 \log K$

Si $\omega \rightarrow \infty$, $|H_2(j\omega)|_{dB} \rightarrow - \infty$

Pente de la droite :
Calculons : $|H_2(j10\omega)|_{dB} - |H_2(j\omega)|_{dB} = 20 \log K - 20 \log 10\omega - 20 \log K + 20 \log\omega = - 20$ dB

La courbe est donc une droite définie par un point ($\omega = 1$, $|H_2(j\omega)|_{dB} = 20 \log K$) et qui <u>décroît</u> de <u>20 dB/décade</u>.

<u>Argument</u> $\varphi = - \arctan \infty$



Intérêt du diagramme de BODE pour les systèmes en cascade

Une fonction de transfert est le plus souvent le produit de formes canoniques :

- proportionnel (gain pur) K
- intégrateur pur 1/p
- premier ordre $1/(1+\tau p)$
- numérateur de la forme $(1+\tau p)$
- ...

Prenons comme exemple $H_3(p) = K(1+\tau_1 p)/p\,(1+\tau_2 p) \Rightarrow H_3(j\omega) = K(1+\tau_1 j\omega)/p\,(1+\tau_2 j\omega)$

<u>Module</u> $|H_3(j\omega)|_{dB} = 20 \log K + 20 \log \sqrt{1 + \tau_1^2\,\omega^2} - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{1 + \tau_2^2\,\omega^2}$

$\varphi = + \arctan \tau_1\omega - 90° - \arctan \tau_2\omega$

L'utilisation de l'outil logarithme permet de remplacer les produits par des sommes. Le diagramme asymptotique est la somme des diagrammes vus précédemment.

Traçons $H_3(p) = K(1+\tau_1 p)/p\,(1+\tau_2 p) = 2(1+0.2\,p)/p\,(1+0.02\,p) \Rightarrow \omega_{1c} = 5$ rd/s et $\omega_{2c} = 50$ rd/s

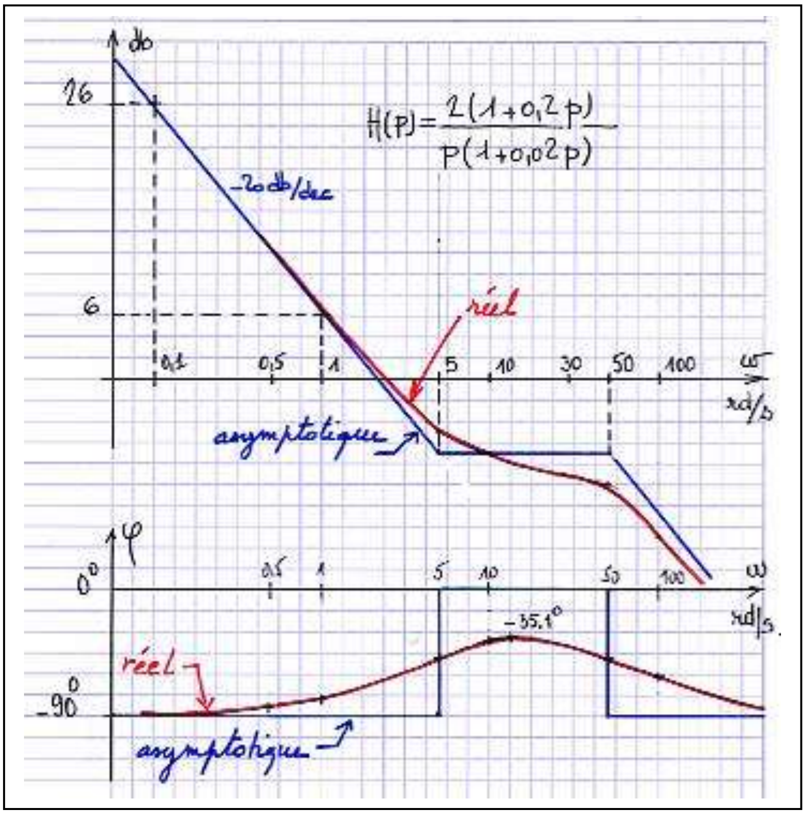
<u>Module asymptotique :</u>

- en $\omega = 0.1$ rd/s, on est inférieur à 0.1 ω_{1c} et 0.1 ω_{2c}, la courbe est sur l'asymptote. Le module est alors égal à $20 \log K - 20 \log \omega = 20 \log 2 - 20 \log 0.1 = 26$ dB. Par ce point on fait passer l'asymptote qui descend de 20 dB/décade.
- A partir de $\omega_{1c} = 5$ rd/s, la pente de l'asymptote est égale à –20 + 20 = 0 dB/dec
  (+ 20 dB/décade car (1+0.2 p) est au numérateur)
- A partir de $\omega_{2c} = 50$ rd/s, la pente de l'asymptote est égale à –20 dB/dec

<u>Phase asymptotique :</u>

- en $\omega = 0.1$ rd/s, on est inférieur à 0.1 ω_{1c} et 0.1 ω_{2c}, $\varphi = -90°$
- $\omega_{1c} = 5$ rd/s la phase augmente de 90°
- $\omega_{2c} = 50$ rd/s la phase diminue à nouveau de 90°

La courbe rouge représente le diagramme de BODE tracé point par point.



Entraînez-vous :
Tracez la réponse fréquentielle de la fonction de transfert du correcteur à avance de phase : $C(p) = (1+0.5p)/(1+0.01p)$ dans BODE asymptotique.
Vérifier votre tracé avec ECHELON et tracez point par point les courbes réelles.