



AUTOMATIQUE PT

ETUDE DES SYSTEMES ASSERVIS

**COURS DE 2^{nde} ANNEE
Promotion 120
ICAM DE NANTES**

Chapitre 5 :

Système du 2nd ordre.

1. Définition, équations du système.

Un système du 2nd ordre est un système dont l'équation caractéristique est de la forme :

$$S_0 \cdot s(t) + S_1 \cdot \frac{d(s(t))}{dt} + S_2 \cdot \frac{d(s(t))^2}{dt^2} = E_0 \cdot e(t) \text{ ou bien,}$$

$$S_0 \cdot s(t) + S_1 \cdot \frac{d(s(t))}{dt} + S_2 \cdot \frac{d(s(t))^2}{dt^2} = E_0 \cdot e(t) + E_1 \cdot \frac{d(e(t))}{dt} + E_2 \cdot \frac{d(e(t))^2}{dt^2} \text{ dans le cas}$$

d'un système du 2nd ordre généralisé.

Dans cette étude théorique, nous ne traiterons que les systèmes de la première forme.

a. Transmittance en p.

La transformée de Laplace de l'équation caractéristique permet d'écrire :

$$S_0 \cdot S(p) + S_1 \cdot p \cdot S(p) + S_2 \cdot p^2 \cdot S(p) = E_0 \cdot E(p) \Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{E_0}{S_0 + S_1 \cdot p + S_2 \cdot p^2} = \frac{\frac{E_0}{S_0}}{1 + p \cdot \frac{S_1}{S_0} + p^2 \cdot \frac{S_2}{S_0}}$$

b. Forme canonique :

Il existe 2 formes canoniques pour les systèmes du 2nd ordre :

- 1^{ère} forme (la plus courante) :

$$\text{On écrit : } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2}$$

- 2^{ème} forme :

$$\text{On écrit : } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\omega_n^2 \cdot K}{\omega_n^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot p + p^2}$$

- $K = \frac{E_0}{S_0}$: Gain statique du système
- $\frac{1}{\omega_n^2} = \frac{S_2}{S_0} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{S_0}{S_2}}$: pulsation naturelle du système
- $\frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = \frac{S_1}{S_0} \Rightarrow \xi = \frac{\omega_n \cdot S_1}{2 \cdot S_0} = \frac{S_1}{2 \cdot \sqrt{S_0 S_2}}$: coefficient d'amortissement réduit du système.

2. Réponses indicielles d'un système du 2nd ordre.

La seule réponse temporelle étudiée sera la réponse d'un système du 2nd ordre à un échelon d'Heaviside.

$$e(t) = \gamma(t) \Rightarrow E(p) = \Gamma(p) = \frac{1}{p}$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2} \Rightarrow S(p) = E(p) \cdot H(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2}$$

- Etude du régime établi.

$$s(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} (p \cdot S(p)) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(p \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2} \right) = 0$$

$$s(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot S(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2} \right) = K$$

- Pente à l'origine.

$$\frac{d(s(0))}{dt} = \lim_{p \rightarrow \infty} p(p \cdot S(p) - s(0)) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \left(\left(p \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2} \right) - 0 \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} \right) = 0$$

La tangente à l'origine est horizontale, ce qui diffère des systèmes du 1^{er} ordre.

- Etude du régime transitoire.

$$S(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2} = \frac{1}{p} \cdot \frac{\omega_n^2 \cdot K}{\omega_n^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot p + p^2}$$

Pour étudier le régime transitoire, il faut replacer S(p) dans le domaine temporel. Pour ce faire, il est nécessaire de faire une décomposition de S(p) en éléments simples.

Cette décomposition est faisable si le dénominateur est un produit. Il faut donc factoriser le dénominateur grâce à la recherche des pôles de S(p).

Nota : on appelle pôles les termes qui annulent le dénominateur.

- Calcul des pôles.

$$1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2 = 0 \Leftrightarrow \omega_n^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot p + p^2 = 0$$

$$\Delta' = (\omega_n \cdot \xi)^2 - \omega_n^2 = \omega_n^2 (\xi^2 - 1)$$

- 1^{er} cas $\xi > 1 \Rightarrow \Delta' > 0$

L'équation des pôles à deux racines réelles positives :

$$P_1 = -\xi \omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$P_2 = -\xi \omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

On pose $\tau_1 = \frac{-1}{P_1}$ et $\tau_2 = \frac{-1}{P_2}$, en remarquant que, malgré leurs écriture, τ_1 et τ_2 sont des réels, non des constantes de temps.

$S(p)$ devient :

$$S(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K \cdot \omega_n^2}{(p - P_1) \cdot (p - P_2)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{K \cdot \omega_n^2}{\left(p + \frac{1}{\tau_1}\right) \cdot \left(p + \frac{1}{\tau_2}\right)}$$

$$S(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K \cdot \omega_n^2}{\left(\frac{1 + \tau_1 p}{\tau_1}\right) \cdot \left(\frac{1 + \tau_2 p}{\tau_2}\right)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{K \cdot \omega_n^2}{(1 + \tau_1 p) \cdot (1 + \tau_2 p) \cdot \frac{1}{\tau_1 \cdot \tau_2}}$$

Remarque :

$$\tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{-1}{P_1} \cdot \frac{-1}{P_2} = \frac{1}{-\xi \omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \frac{1}{-\xi \omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}$$

$$\tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{1}{\xi^2 \omega_n^2 - \omega_n^2 (\sqrt{\xi^2 - 1})^2} = \frac{1}{\xi^2 \omega_n^2 - \omega_n^2 \xi^2 + \omega_n^2}$$

$$\tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{1}{\omega_n^2}$$

D'où :

$$S(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K \cdot \omega_n^2}{(1 + \tau_1 p) \cdot (1 + \tau_2 p) \cdot \omega_n^2} = \frac{1}{p} \cdot \frac{K}{(1 + \tau_1 p) \cdot (1 + \tau_2 p)}$$

La décomposition en éléments simples est de la forme :

$$S(p) = K \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{(1 + \tau_1 p)} + \frac{C}{(1 + \tau_2 p)} \right)$$

- Calcul de A : On multiplie les deux termes par p

$$\frac{1}{(1 + \tau_1 p) \cdot (1 + \tau_2 p)} = A + \frac{Bp}{(1 + \tau_1 p)} + \frac{Cp}{(1 + \tau_2 p)}$$

Si $p=0$, $A = 1$

- Calcul de B : On multiplie les deux termes par $(1 + \tau_1 p)$

$$\frac{1}{p \cdot (1 + \tau_2 p)} = \frac{(1 + \tau_1 p)}{p} + B + \frac{C(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)}$$

Si $p = \frac{-1}{\tau_1}$ $B = \frac{\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1}$

- Calcul de C : On multiplie les deux termes par $(1 + \tau_2 p)$

$$\frac{1}{p \cdot (1 + \tau_1 p)} = \frac{(1 + \tau_2 p)}{p} + \frac{B(1 + \tau_2 p)}{(1 + \tau_1 p)} + C$$

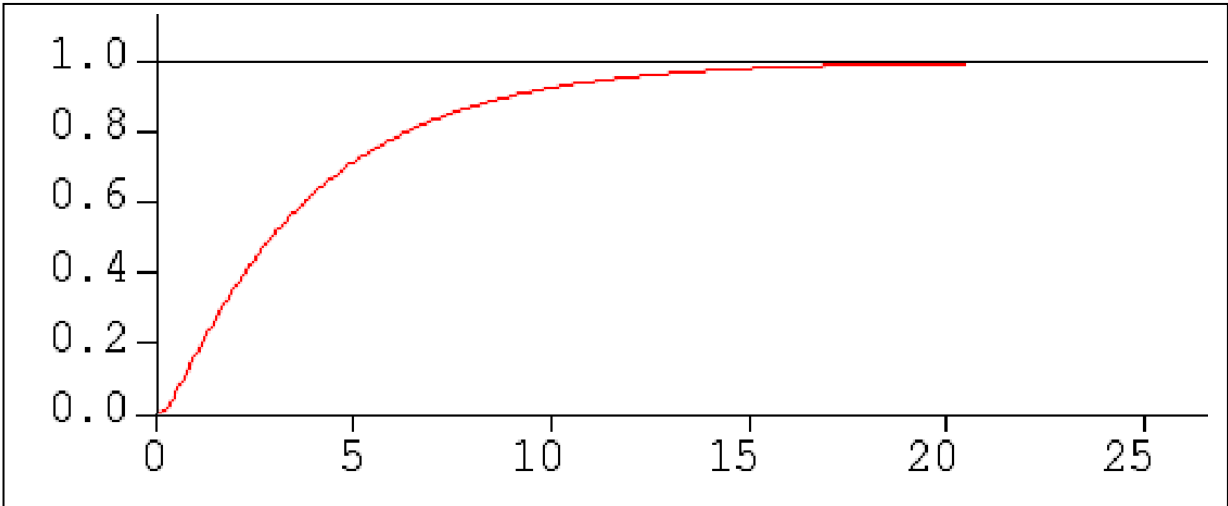
Si $p = \frac{-1}{\tau_2}$ $C = \frac{\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2}$

Donc :

$$S(p) = K \left(\frac{1}{p} + \frac{\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1} \cdot \frac{1}{(1 + \tau_1 p)} + \frac{\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \frac{1}{(1 + \tau_2 p)} \right)$$

D'où

$$s(t) = K + \frac{K}{\tau_2 - \tau_1} \cdot (\tau_1 \cdot e^{-t/\tau_1} - \tau_2 \cdot e^{-t/\tau_2})$$



- 2^{ème} cas $\xi = 1 \Rightarrow \Delta' = 0$

L'équation des pôles à une racine réelle double $P_1 = -\omega_n$

$$S(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K \cdot \omega_n^2}{(p - P_1)^2} = \frac{K \cdot \omega_n^2}{p} \cdot \frac{\frac{-1}{P_1^2}}{\frac{(p - P_1)^2}{-P_1^2}} = \frac{K \cdot \omega_n^2}{p} \cdot \frac{\frac{-1}{P_1^2}}{\left(\frac{p}{-P_1} + 1\right)^2}$$

On pose $\tau = \frac{-1}{P_1} = \frac{1}{\omega_n}$:

$$S(p) \text{ devient : } S(p) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{p} \cdot \frac{\frac{1}{\omega_n^2}}{(\tau p + 1)^2} = K \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(1 + \tau p)^2} \right)$$

Décomposition en éléments simples :

$$S(p) = K \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(1 + \tau p)^2} \right) = K \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{(1 + \tau p)} + \frac{C}{(1 + \tau p)^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow A(1 + 2\tau p + p^2 \tau^2) + B(p + \tau p^2) + Cp = 1$$

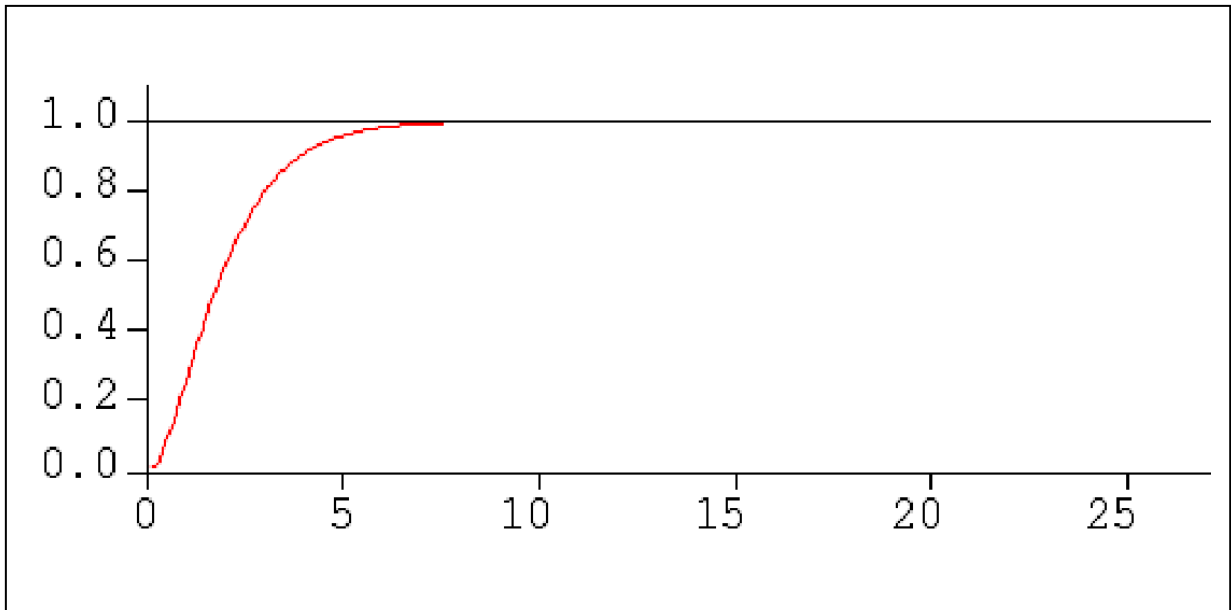
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ 2\tau + B + C = 0 \\ \tau^2 + B\tau = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -\tau \\ C = -\tau \end{cases}$$

$$\text{D'où } S(p) = K \left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{(1 + \tau p)} - \frac{\tau}{(1 + \tau p)^2} \right)$$

$$\text{On donne } \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(1 + \tau p)^2} \right) = \frac{t}{\tau^2} \cdot e^{-t/\tau}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$s(t) = K \left(1 - e^{-t/\tau} - \frac{t}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} \right)$$



- 3^{ème} cas $\xi < 1 \Rightarrow \Delta' < 0$

L'équation des pôles à deux racines complexes conjuguées.

$$P_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\omega_n(\xi - j\sqrt{1-\xi^2})$$

$$P_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\omega_n(\xi + j\sqrt{1-\xi^2})$$

Si on pose $\xi = \cos(\theta)$ alors, $\sqrt{1-\xi^2} = \sin(\theta)$ donc,

$$P_1 = -\omega_n \cdot e^{-j\theta} \text{ et } P_2 = -\omega_n \cdot e^{+j\theta} \text{ avec } \theta = \arctg\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$$

$$S(p) = K \cdot \omega_n^2 \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(p-P_1) \cdot (p-P_2)} \right) = K \cdot \omega_n^2 \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{(p-P_1)} + \frac{C}{(p-P_2)} \right)$$

- Calcul de A : On multiplie les deux termes par p

$$\frac{1}{(p-P_1) \cdot (p-P_2)} = A + \frac{Bp}{(p-P_1)} + \frac{Cp}{(p-P_2)}$$

Si $p=0$, $A = \frac{1}{P_1 P_2}$

$$P_1 P_2 = (-\omega_n \cdot (\xi - j\sqrt{1-\xi^2})) \cdot (-\omega_n \cdot (\xi + j\sqrt{1-\xi^2})) = \omega_n^2 \xi^2 + \omega_n^2 \cdot (\sqrt{1-\xi^2})^2$$

$$P_1 P_2 = \omega_n^2 (\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2) = \omega_n^2$$

D'où

$$A = \frac{1}{\omega_n^2}$$

- Calcul de B : On multiplie les deux termes par $(p-P_1)$

$$\frac{1}{p \cdot (p-P_2)} = \frac{A(p-P_1)}{p} + B + \frac{C(p-P_1)}{(p-P_2)}$$

$$\text{Si } p = P_1 \quad \frac{1}{P_1 \cdot (P_1 - P_2)} = B = \frac{P_2}{\omega_n^2 \cdot (P_1 - P_2)}$$

$$\text{D'où} \quad \boxed{B = \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{P_2}{(P_1 - P_2)}}$$

▪ Calcul de C : On multiplie les deux termes par (p-P₂)

$$\frac{1}{p \cdot (p - P_1)} = \frac{A(p - P_2)}{p} + \frac{B(p - P_2)}{(p - P_1)} + C$$

$$\text{Si } p = P_2 \quad \frac{1}{P_2 \cdot (P_2 - P_1)} = C = \frac{P_1}{\omega_n^2 \cdot (P_2 - P_1)}$$

$$\text{D'où} \quad \boxed{C = \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{P_1}{(P_2 - P_1)}}$$

On peut donc écrire :

$$S(p) = K \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{P_2}{(P_1 - P_2)} \cdot \frac{1}{(p - P_1)} + \frac{P_1}{(P_2 - P_1)} \cdot \frac{1}{(p - P_2)} \right)$$

On en tire :

$$s(t) = K \cdot \left(1 + \frac{P_2}{(P_1 - P_2)} \cdot e^{P_1 t} + \frac{P_1}{(P_2 - P_1)} \cdot e^{P_2 t} \right)$$

$$\text{On connaît : } \begin{cases} P_1 = -\omega_n \cdot e^{j\theta} \\ P_2 = -\omega_n \cdot e^{-j\theta} \\ P_1 - P_2 = 2 \cdot j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \\ P_2 - P_1 = -2 \cdot j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \end{cases}$$

$$s(t) = K \cdot \left(1 + \frac{-\omega_n \cdot e^{j\theta}}{2 \cdot j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{P_1 t} + \frac{-\omega_n \cdot e^{-j\theta}}{-2 \cdot j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{P_2 t} \right)$$

$$s(t) = K \cdot \left(1 - \frac{e^{j\theta}}{2 \cdot j \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\omega_n t (\xi - j \sqrt{1 - \xi^2})} + \frac{e^{-j\theta}}{2 \cdot j \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\omega_n t (\xi + j \sqrt{1 - \xi^2})} \right)$$

$$s(t) = K \cdot \left(1 - \frac{e^{-\omega_n \xi t}}{2 \cdot j \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{j(\omega_n t \sqrt{1 - \xi^2} + \theta)} + \frac{e^{-\omega_n \xi t}}{2 \cdot j \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-j(\omega_n t \sqrt{1 - \xi^2} + \theta)} \right)$$

$$s(t) = K \cdot \left(1 - \frac{e^{-\omega_n \xi t}}{2 \cdot j \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \left[e^{j(\omega_n t \sqrt{1 - \xi^2} + \theta)} - e^{-j(\omega_n t \sqrt{1 - \xi^2} + \theta)} \right] \right)$$

$$s(t) = K \cdot \left(1 - \frac{e^{-\omega_n \xi t}}{2 \cdot j \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \left[2j \cdot \sin(\omega_n \cdot t \cdot \sqrt{1 - \xi^2} + \theta) \right] \right)$$

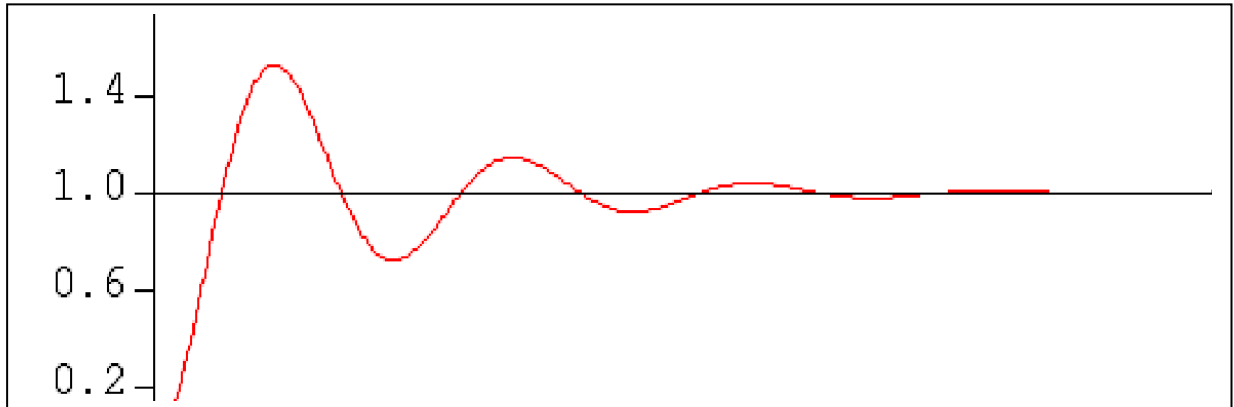
$$\boxed{s(t) = K \cdot \left(1 - \frac{e^{-\omega_n \xi t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \left[\sin(\omega_n \cdot t \cdot \sqrt{1 - \xi^2} + \theta) \right] \right)}$$

La réponse temporelle comprend un terme en $\sin(\omega_n \cdot t \cdot \sqrt{1 - \xi^2})$ si $\xi < 1$.

Dans ce cas, on parle de pseudo période, car le signal d'entrée n'est pas périodique.

La pulsation de pseudo période est

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

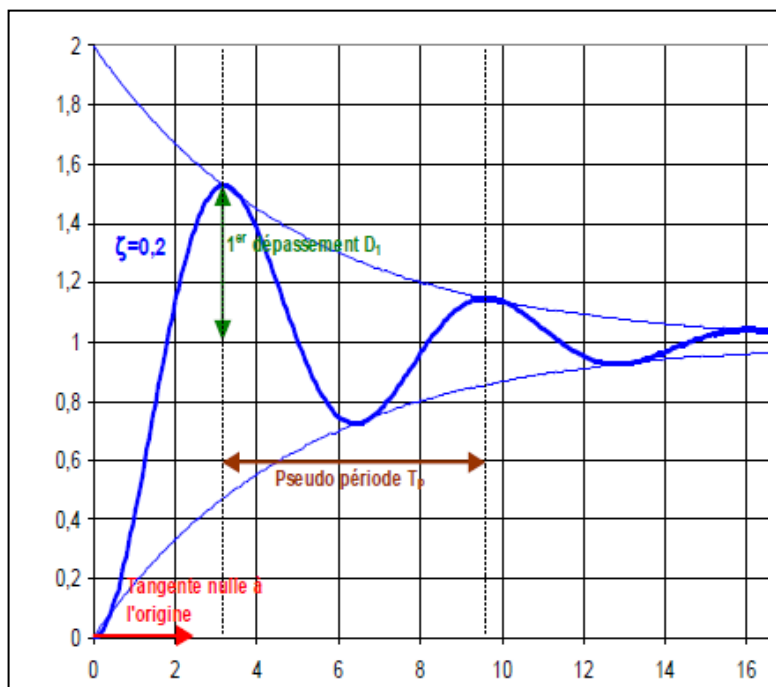


- Déphasement.

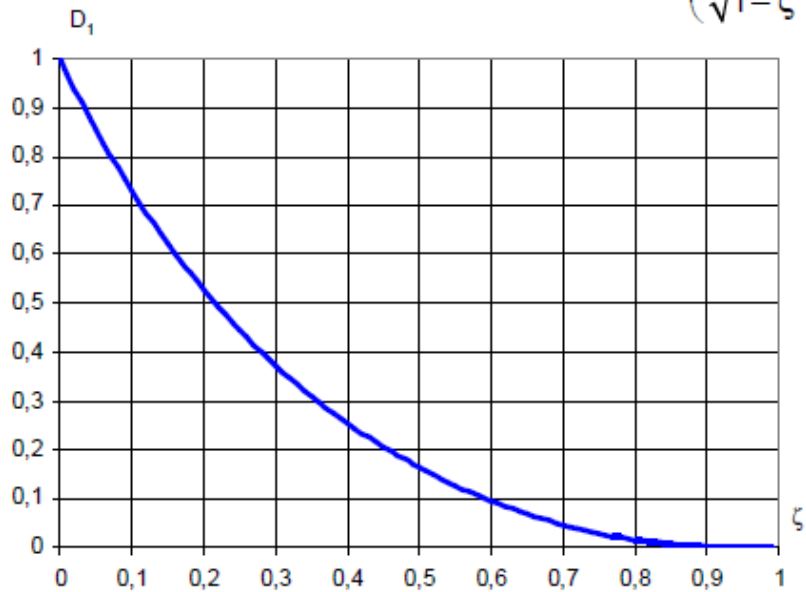
Si $\xi < 1$, il y a pseudo pulsation, et la valeur finale est dépassée au cours de l'établissement du régime permanent.

On peut montrer (recherche des valeurs annulant la dérivée de $s(t)$), que D_1 , premier dépassement :

- à lieu pour $t = t_1 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$,
- et sa valeur est $D_1 = e^{-\frac{\pi \cdot \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$



$$D_1 = K \cdot \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

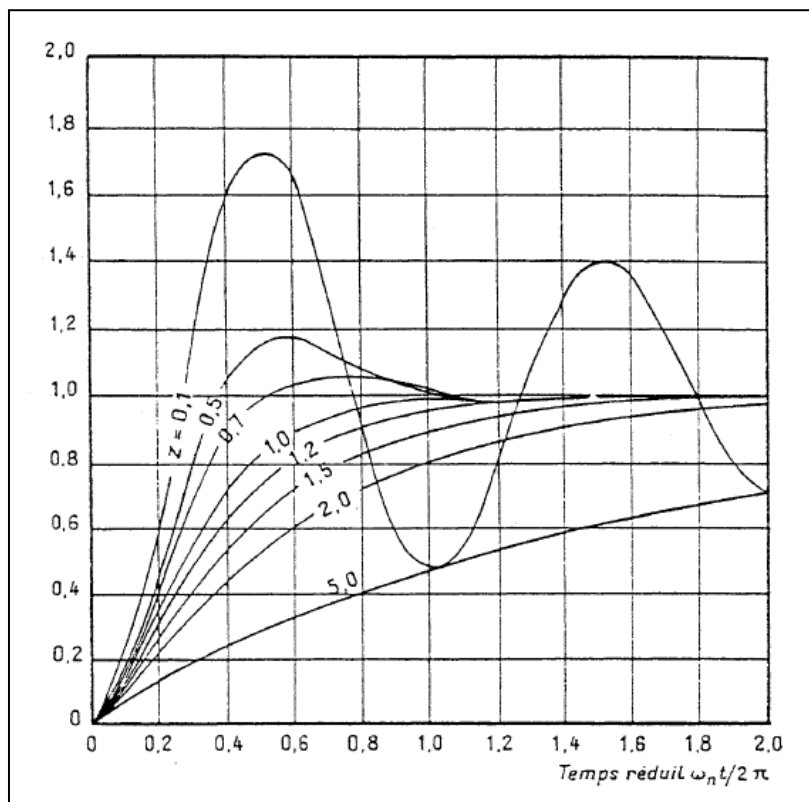


Abaque donnant la valeur du premier dépassement D_1 en fonction de ζ pour $K=1$

Remarque :

On exprime souvent le dépassement en pourcentage de la valeur finale :

$$D_1 = \frac{\text{Valeurmaxi} - \text{Valeurfinale}}{\text{Valeurfinale}}$$



3. Réponse fréquentielle d'un système du 2nd ordre.

Dans ce paragraphe, nous allons étudier la réponse d'un système du 2nd ordre à une sollicitation harmonique : $e(t) = E_0 \sin(\omega t)$.

Cet essai se fait à fréquence variable, et permet de mettre en évidence l'évolution des caractéristiques en fonction de la pulsation ω . Il est fondamental dans l'étude des filtres et dans l'analyse de la stabilité.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2} \text{ et } E(p) = E_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2} \cdot E_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{KE_0 \omega}{\frac{1}{p_1 p_2} (p - p_1)(p - p_2)(\omega^2 + p^2)}$$

$$S(p) = \frac{KE_0 \omega}{\frac{1}{p_1 p_2} (p - p_1)(p - p_2)(\omega^2 + p^2)}$$

Décomposition en éléments simples :

$$S(p) = \frac{KE_0 \omega}{1/(p_1 p_2)} \cdot \left[\frac{A}{(p + j\omega)} + \frac{B}{(p - j\omega)} + \frac{C}{(p - p_1)} + \frac{D}{(p - p_2)} \right], \text{ on cherche donc A,}$$

B, C et D tels que :

$$\frac{1}{\frac{1}{p_1 p_2} (p - p_1)(p - p_2)(\omega^2 + p^2)} = p_1 p_2 \cdot \left[\frac{A}{(p + j\omega)} + \frac{B}{(p - j\omega)} + \frac{C}{(p - p_1)} + \frac{D}{(p - p_2)} \right]$$

La recherche de solution est comparable à celle utilisée pour le 1^{er} ordre, avec cette fois 2 termes transitoires non étudiés en régime harmonique.

Les constantes A et B sont :

$$A = -\frac{KE_0}{2j} \qquad B = +\frac{KE_0}{2j}$$

Comme pour le 1^{er} ordre, on retrouve :

$$s(t) = |H(j\omega)| \cdot E_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

la réponse à une entrée sinusoïdale est une sortie sinusoïdale de même pulsation ω , avec une amplitude $|H(j\omega)|$ et un déphasage φ .

L'étude harmonique consiste donc à étudier $|H(j\omega)|$ et $\varphi(j\omega)$ en fonction de la pulsation ω .

Calculons $\|H(j\omega)\|$

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot (j\omega)^2} = \frac{\omega_n^2 \cdot K}{\omega_n^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot j\omega + (j\omega)^2} = \frac{\omega_n^2 \cdot K}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j(2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \omega)}$$

$$\|H(j\omega)\| = \frac{\omega_n^2 \cdot K}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \omega_n^2 \cdot \omega^2}}$$

En dB, le module s'exprime :

$$\|H(j\omega)\|_{dB} = 20\log(\omega_n^2 \cdot K) - 20\log(\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \omega_n^2 \cdot \omega^2})$$

et l'argument $Arg[H(j\omega)] = -\arctg\left(\frac{2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$

4. Résonance

L'extremum est obtenu pour ω tel que : $\frac{d\|H(j\omega)\|}{d\omega} = 0$

$\|H(j\omega)\|_{dB}$ sera maximum pour $((\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \omega_n^2 \cdot \omega^2)$ minimum.

Recherche de l'extremum :

$$\frac{d[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega_n^2 \cdot \omega^2]}{d\omega} = 0$$

$$-4 \omega \cdot (\omega_n^2 - \omega^2) + 8 \xi^2 \cdot \omega_n^2 \cdot \omega = 0$$

$$-4 \omega \cdot (\omega_n^2 - \omega^2 - 2 \xi^2 \cdot \omega_n^2) = 0$$

$$\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Pulsation de résonance

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Pour que ω_r existe il faut que :

$$1 - 2\xi^2 \geq 0$$

Donc

$$\xi \leq \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

5. Représentation : Lieux de transfert.

Le lieu de transfert est la représentation graphique d'une fonction de transfert au moyen d'une ou de deux courbes caractéristiques.

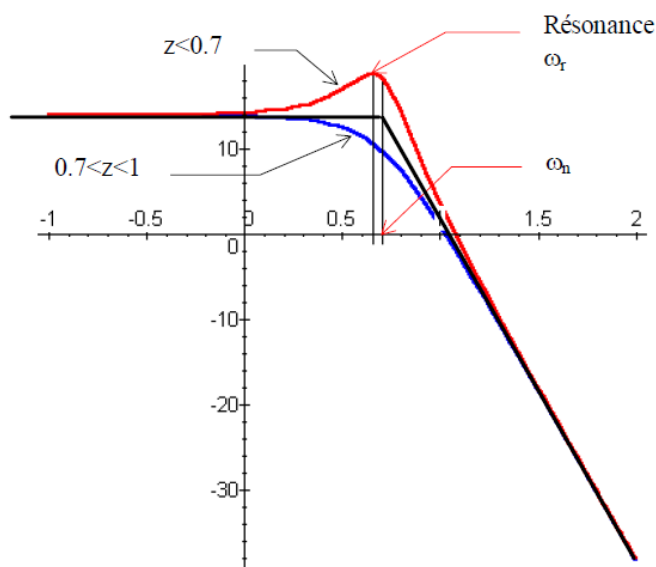
C'est une représentation fréquentielle ou harmonique. Il existe plusieurs représentations graphiques conventionnelles mais toutes ont leurs avantages et leurs inconvénients.

Notation : le coefficient d'amortissement ξ est noté z .

Lieu de BODE :

Pour $z < 1$

Diagramme d'amplitude



Un système du second ordre avec $z < 1$ est parfaitement défini par le tracé de ces asymptotes. Il peut être nécessaire de compléter le tracé par la pulsation de résonance et l'amplitude correspondante.

Pour $z < 0,7$ on a la courbe est toujours au-dessus des asymptotes et le système possède une résonance :

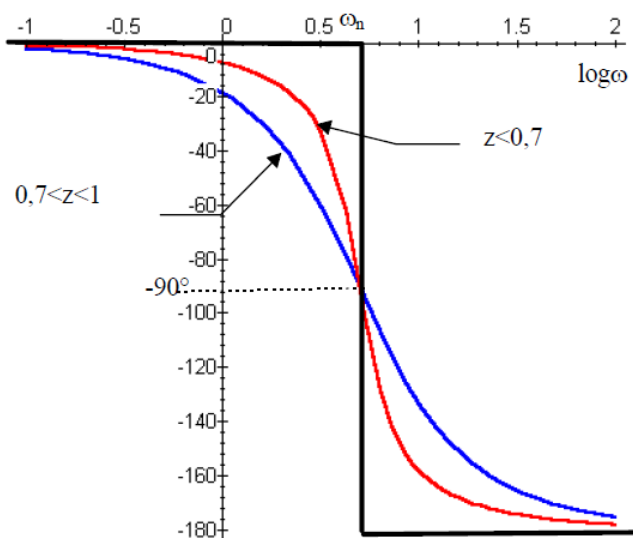
$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2z^2}$$

le coefficient de surtension s'écrit :

$$Q = \frac{A(\omega_r)}{A(0)} = \frac{1}{2 \cdot z \sqrt{1 - z^2}}$$

pour $1 > z > 0,7$, le diagramme reste sous les asymptotes (pas de surtension).

Diagramme des phases



Le diagramme asymptotique est composé de 2 droites horizontales:

$$\Phi(\omega \rightarrow 0) = 0^\circ$$

$$\Phi(\omega \rightarrow +\infty) = -180^\circ$$

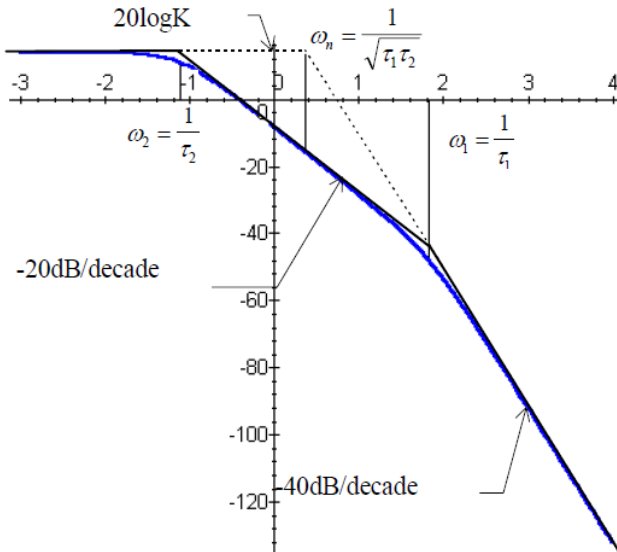
Le changement de phase à lieu pour la pulsation de cassure.

Le diagramme asymptotique est assez proche de la courbe réelle.

Remarque : plus z est grand plus la courbe est écartée des asymptotes.

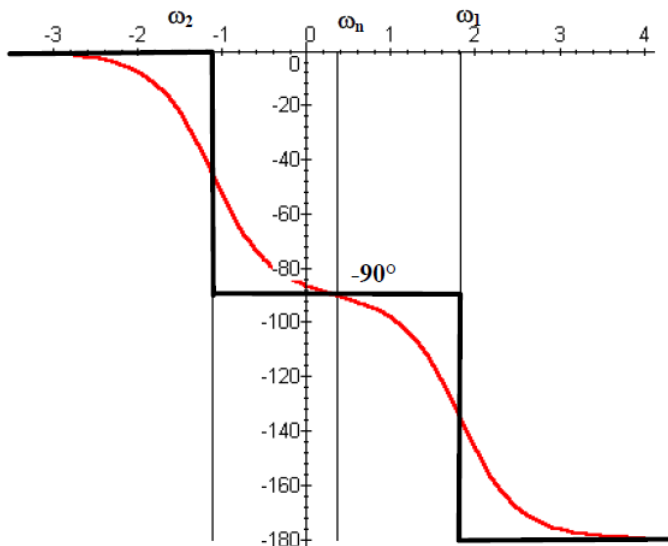
Pour $z > 1$,

Diagramme d'amplitude



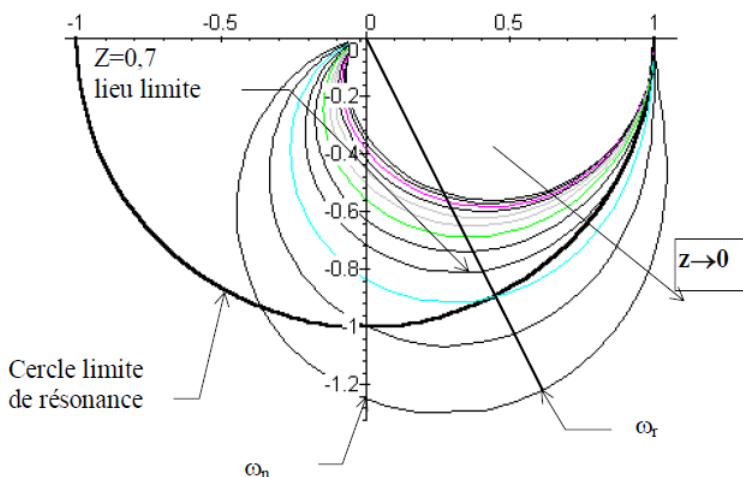
Dans le cas d'un système aperiodique, a partir des deux racines $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{\tau_2}$ du dénominateur, on peut tracer une première "asymptote" issue de ω_1 avec une pente de **-20 dB/décade**. Puis une deuxième asymptote est issue de ω_n avec une pente de **-40 dB/décade**.

Diagramme des phases



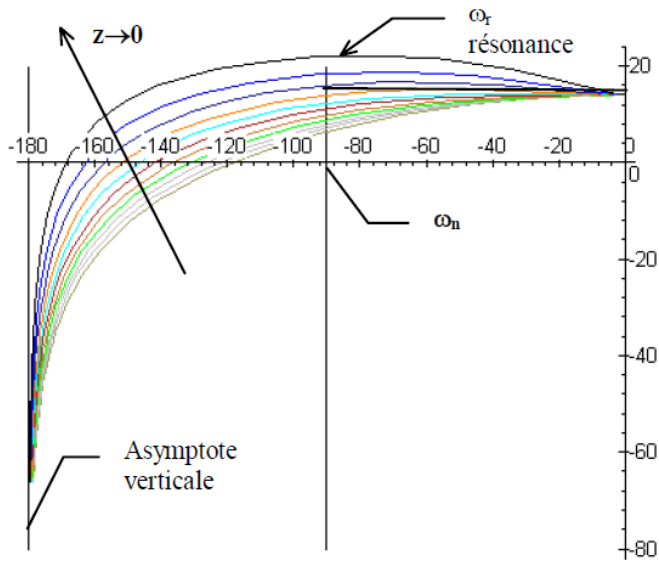
Le diagramme asymptotique relatif à la phase présente deux décrochements :
 le premier pour ω_1 introduit un changement de phase de -90° ;
 le deuxième pour ω_2 un nouveau décrochement de -90° ;
 l'asymptote à l'infini est de -180° .

Lieu de NYQUIST :



Pour $\omega=0$ le module $Adb(0)=K$, (le tracé ci-contre est pour $K=1$) pour $\omega=+\infty$, le module $=0$ et l'argument tend vers -180°
 si $Z < \sqrt{2}$ la courbe passe au delà du cercle de rayon K , la pulsation de résonance est obtenue pour le module maximal. La pulsation de résonance se mesure à l'intersection avec l'axe imaginaire.
 La tangente pour $\omega=+\infty$, est de -180° . La courbe ne passe pas au dessus de l'axe réel.

Lieu de BLACK :



Le diagramme ci-contre représente différents tracés en fonction de z de système de 2nd ordre. L'asymptote verticale est pour $\Phi = -180^\circ$

6. BILAN :

En fonction de ξ , il est possible de définir différentes pulsations caractéristiques pour les systèmes du second ordre :

	Pulsation de cassure	Pseudo pulsation	Pulsation de résonance	Réponse impulsionnelle
$\xi > 1$	2 pulsations de cassure $\omega_{c1} = 1/\tau_1 ; \omega_{c2} = 1/\tau_2$			Apériodique
$\xi = 1$	$\omega_c = \omega_n = \frac{1}{\tau}$			Apériodique critique
$\frac{1}{\sqrt{2}} < \xi < 1$	$\omega_c = \omega_n = \frac{1}{\tau}$	$\omega_p = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$		Oscillatoire amortie
$\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\omega_c = \omega_n = \frac{1}{\tau}$	$\omega_p = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$	$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2}$	Oscillatoire amortie (résonance)

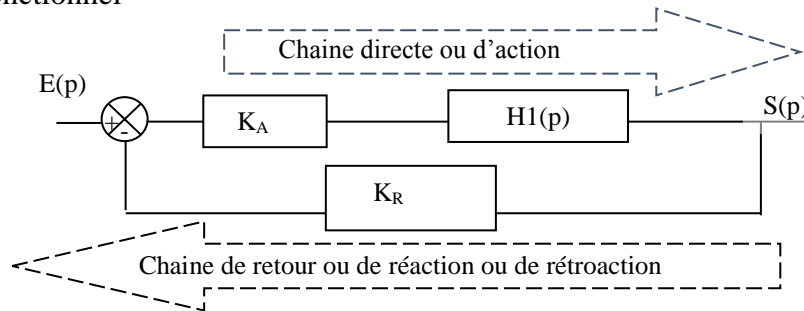
Chapitre 6 : Systèmes linéaires asservis.

1. Modèle du système linéaire asservi

1. Définition

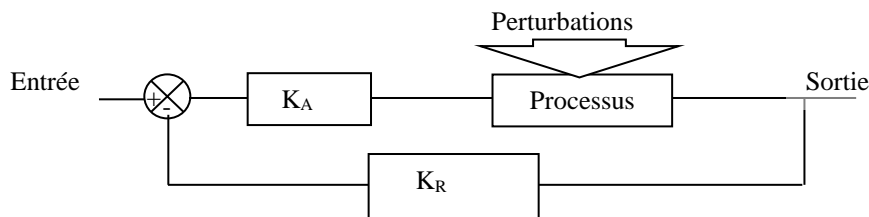
Les systèmes asservis sont conçus de manière à corriger par eux même les écarts de la valeur réelle de la sortie et la valeur désirée (consigne).

2. Schéma fonctionnel

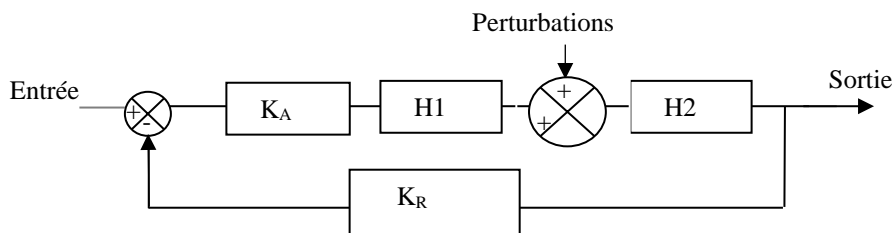


Ce modèle permet de valider le fait que le signal de sortie doit agir sur l'entrée du processus afin de faire évoluer la sortie vers la valeur désirée.

3. Perturbations



Le système devient :



Un système perturbé est d'après le schéma bloc, assimilable à un système multi variable d'entrée.

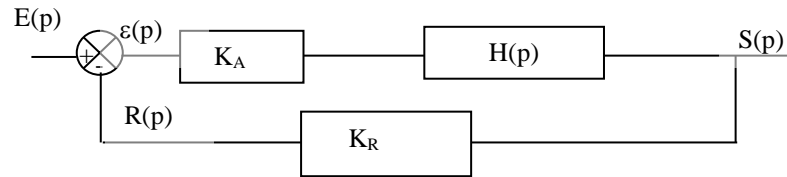
Pour résoudre ce problème on procède par étape :

- 1- $s(t)$ fonction de $e(t)$ avec la perturbation nulle $p(t)=0 \Rightarrow s(t) = G_1(e(t))$
- 2- $s(t)$ fonction de $p(t)$ avec l'entrée nulle $e(t) = 0 \Rightarrow s(t) = G_2(p(t))$
- 3- superposition $s(t) = G_1(e(t)) + G_2(p(t))$

2. Boucle ouverte / Boucle fermée

1. Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)

Soit le schéma bloc suivant :



La FTBO est la fonction reliant R(p) à ε(p).

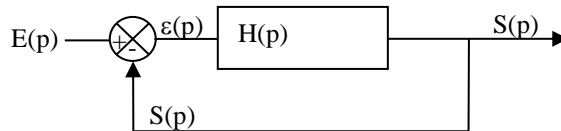
$$FTBO = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)}$$

C'est-à-dire : $FTBO = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = K_R \cdot K_A \cdot H(p)$

2. Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF)

2.1 Cas du retour unitaire :

Un système est à retour unitaire si $R(p) = S(p)$



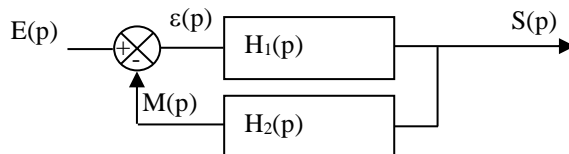
$$S(p) = \varepsilon(p) H(p)$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$$

$$\Rightarrow S(p) = (E(p) - S(p)) H(p)$$

$$\Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H(p)}{1 + H(p)}$$

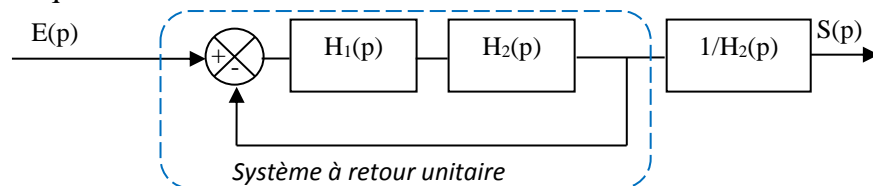
2.2 Cas du retour non unitaire :



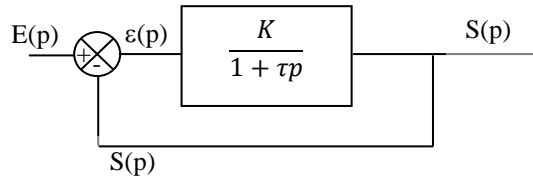
$$S(p) = H_1(p) (E(p) - H_2(p) S(p))$$

$$\Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p) \cdot H_2(p)} = \frac{H_1(p) \cdot H_2(p)}{1 + H_1(p) \cdot H_2(p)} \cdot \frac{1}{H_2(p)}$$

Ce système est équivalent à :



3. Etude du système du 1^{er} ordre en BF



En BO : si $E(p) = 1$ alors $s(\infty) \approx K$

En BF : si $E(p) = 1$ alors $s(\infty) = ??$

Le système en BF a de nouvelles caractéristiques :
D'après 2.

$$S(p) = \frac{\frac{K}{1+\tau p}}{1 + \frac{K}{1+\tau p}} = \frac{K}{1+\tau p+K} = \frac{\frac{K}{K+1}}{1 + \frac{\tau}{K+1} p}$$

Remarque : un système du 1^{er} ordre en BO est toujours du 1^{er} ordre en BF.

Gain statique en BF : $K_{BF} = \frac{K}{K+1}$

Constante de temps en BF : $\tau_{BF} = \frac{\tau}{K+1}$

Réponse temporelle :

Le système atteint plus rapidement la valeur finale (qui est d'autant moins importante)

4. Etude du système du 2nd ordre en BF

Fonction transfert en BO : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2}$

En BO, la réponse à un échelon est fonction de ξ :

$$\xi > 1 \quad s(t) = KE_0 \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_2} \right)$$

$$\xi = 1 \quad s(t) = KE_0 \left(1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t} \right)$$

$$\xi < 1 \quad s(t) = KE_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} - \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \theta) \right)$$

Ces trois réponses font converger $s(t)$ vers KE_0 si $t \rightarrow \infty$.

En BF ? Qu'en est-il ?

$$H_{BF}(p) = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{\frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2}}{1 + \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2}}$$

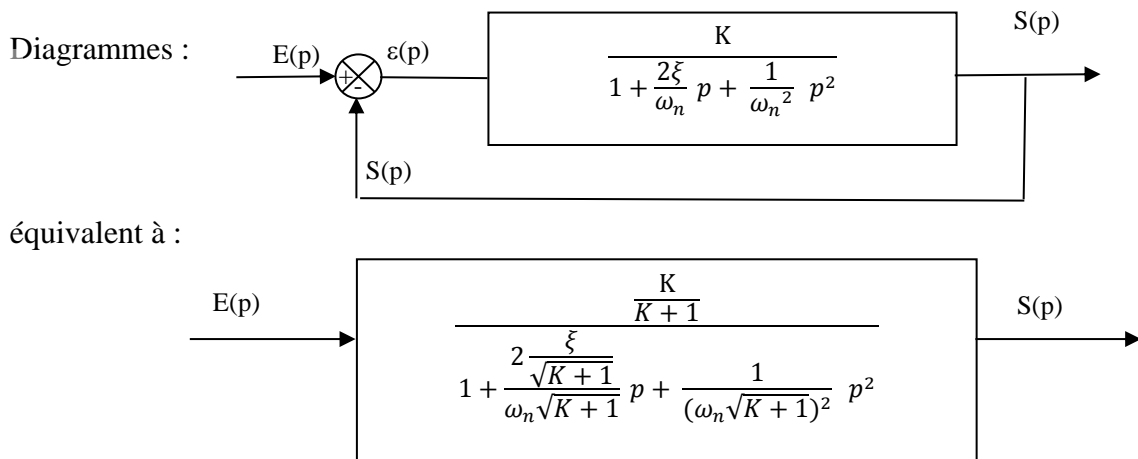
$$H_{BF}(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 + K} = \frac{\frac{K}{K+1}}{1 + \frac{2\xi}{K+1} \frac{p}{\omega_n} + \frac{1}{K+1} \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

Un 2nd ordre en BO reste un 2nd ordre en BF.

Pulsation naturelle : $(\omega_{nBF})^2 = (K + 1)\omega_n^2 \Rightarrow \omega_{nBF} = \omega_n \sqrt{K + 1}$

Coefficient d'amortissement : $\frac{2\xi}{K+1} \frac{1}{\omega_n} = \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{nBF}} = \frac{2\xi_{BF}}{\omega_n \sqrt{K+1}} \Rightarrow \xi_{BF} = \frac{\xi}{\sqrt{K+1}}$

Le fait de boucler augmente ω_n et diminue ξ .



3. Représentation par le diagramme de Black

3.1 Rappel

Le diagramme de Black représente le module en dB en fonction de l'argument en °(degré). Cette courbe est paramétrée en ω , la pulsation qui varie de 0 à $+\infty$.

Pour trouver la réponse harmonique, on trace $H(j\omega)$ qui évolue de la même manière que $s(t)$ lorsque $e(t) = \sin(\omega t)$.

On note *le gain G , le module de $H(j\omega)$*
 le déphase φ , l'argument de $H(j\omega)$

1^{er} ordre : $G_{dB} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{(1 + \tau^2 \omega^2)}$
 $\varphi = -\arctan(\omega \tau)$

2^{eme} ordre :

$$G_{dB} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right)$$

3.2 Abaque de Black : Iso modules de Nichols.

Soit \underline{G} une transmittance



\underline{G} est un nombre complexe : $\underline{G} = G e^{-j\varphi}$

Recherchons les couples $(G_i ; \varphi_i)$ tels que $\frac{S}{E} = M_i$

C'est-à-dire, on recherche pour un module donné la valeur du gain en dB et de la phase.

Rechercher les iso modules de Nichols, c'est :

pour un module et un gain, rechercher une phase.

pour un module et une phase, rechercher un gain

$$M = \frac{S}{E} = \frac{|G e^{-j\varphi}|}{|1 + G e^{-j\varphi}|} = \frac{G}{|1 + G \cos \varphi + j G \sin \varphi|} = \frac{G}{\sqrt{(1 + G \cos \varphi)^2 + (G \sin \varphi)^2}}$$

$$M^2 = \frac{G^2}{1 + 2G \cos \varphi + G^2 \cos^2 \varphi + G^2 \sin^2 \varphi} = \frac{G^2}{1 + 2G \cos \varphi + G^2}$$

$$\Leftrightarrow M^2 (1 + G^2 + 2 G \cos \varphi) - G^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow G^2(M^2 - 1) + G(2M^2 \cos \varphi) + M^2 = 0$$

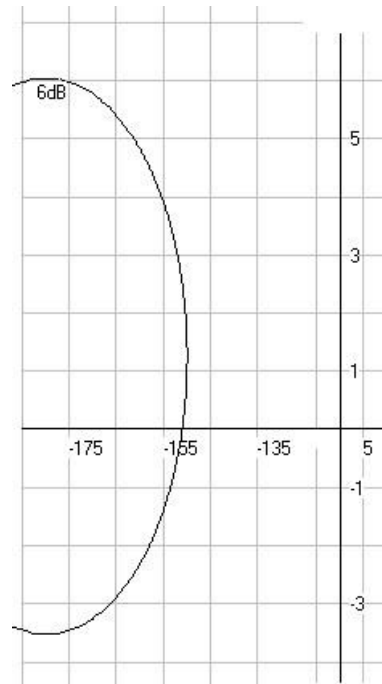
Pour M et φ donnés, on obtient 2 valeurs de G (racines).

Exemples : $M = 2$ ou $M = 6$ dB

φ	$\cos \varphi$	G_1	G_2	G_1 dB	G_2 dB
-180°	-1	0.67	2	-3.32	6
-162°	-0.95	0.75	1.79	-2.55	5.04
-154°	-0.90	0.87	1.53	-1.18	3.67
-143°	-0.8				

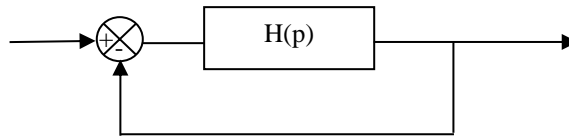
Tracé :

- Pour un module donné M , on obtient ainsi une courbe appelée iso module. Pour différentes valeurs on obtient un réseau de courbes ; **iso modules de NICHOLS**
- Pour une phase donnée φ , on obtient ainsi une courbe appelée iso phase. Pour différentes valeurs on obtient un réseau de courbes ; **iso phases de NICHOLS**



3.3 Exploitations.

Soit $H(p)$ une transmittance



Si le tracé de la fonction transfert en BO coupe un isomodule pour ω_i alors :

$$|H(j\omega_i)| = G_i \quad \text{et} \quad \text{Arg}(H(j\omega_i)) = \varphi_i$$

$$\text{Et de plus : } \left| \frac{H(j\omega_i)}{1+H(j\omega_i)} \right| = M_i$$

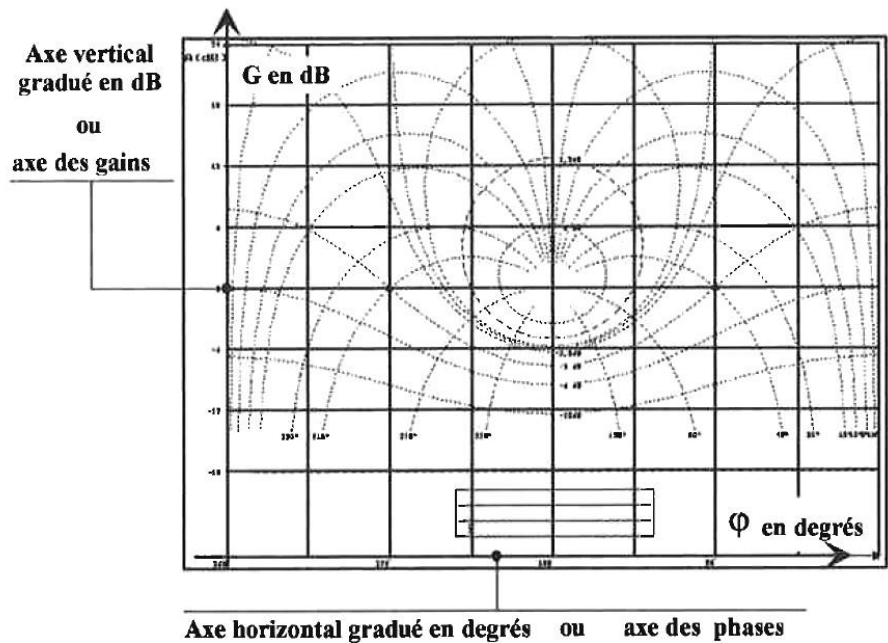
Remarque : Un second ordre a une courbe de Black, pour la FTBO, qui vient tangenter un isomodule et ensuite descendre vers le gain nul, sans couper l'asymptote -180° . La tangence à l'isomodule donne ω_r , et le module de l'isomodule donne l'amplitude maximum du gain en BF à la résonance.

EXPLOITATION DE L'ABAQUE DE BLACK

L'abaque de Black est constitué

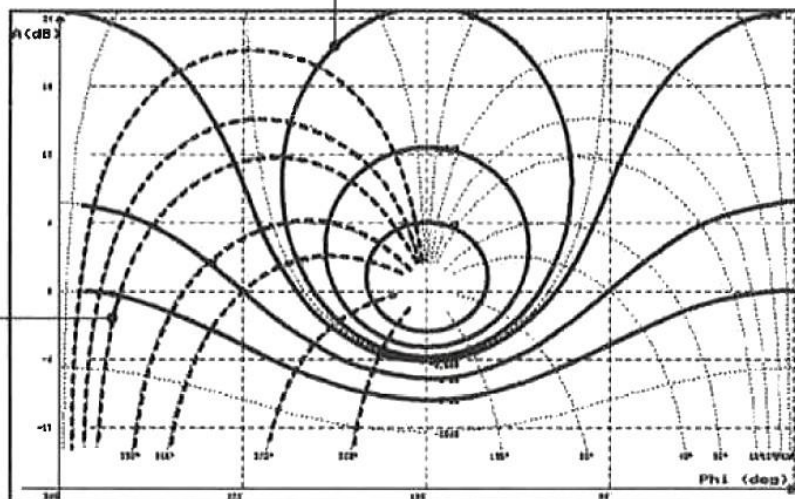
d'un système d'axes cartésiens (G et φ)

et de deux réseaux curvilignes : Courbes à Gain constant et Phase constante.



Réseau gradué en dB Courbes à gain constant

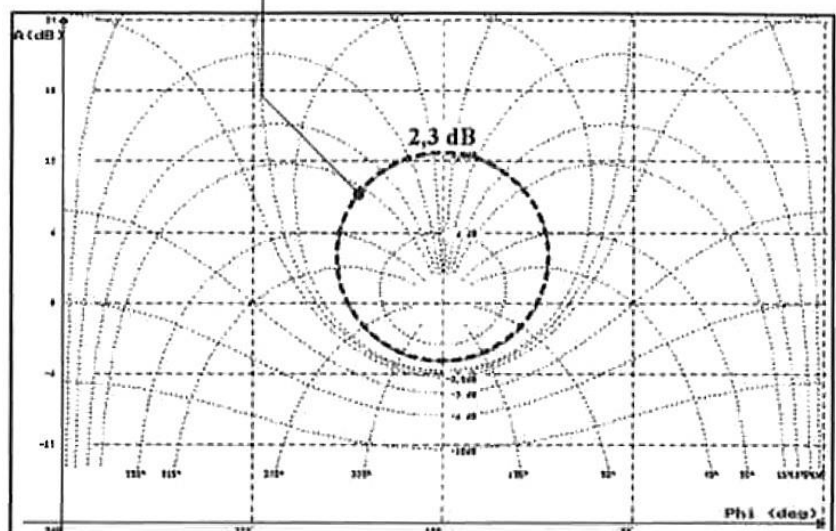
Réseau gradué en degrés Courbes à phase constante



Contour de Hall

On notera l'importance d'une courbe particulière : la courbe à gain constant 2.3dB, appelée **contour de HALL**

Ce contour est utilisé comme critère de réglage pour de nombreux asservissements.

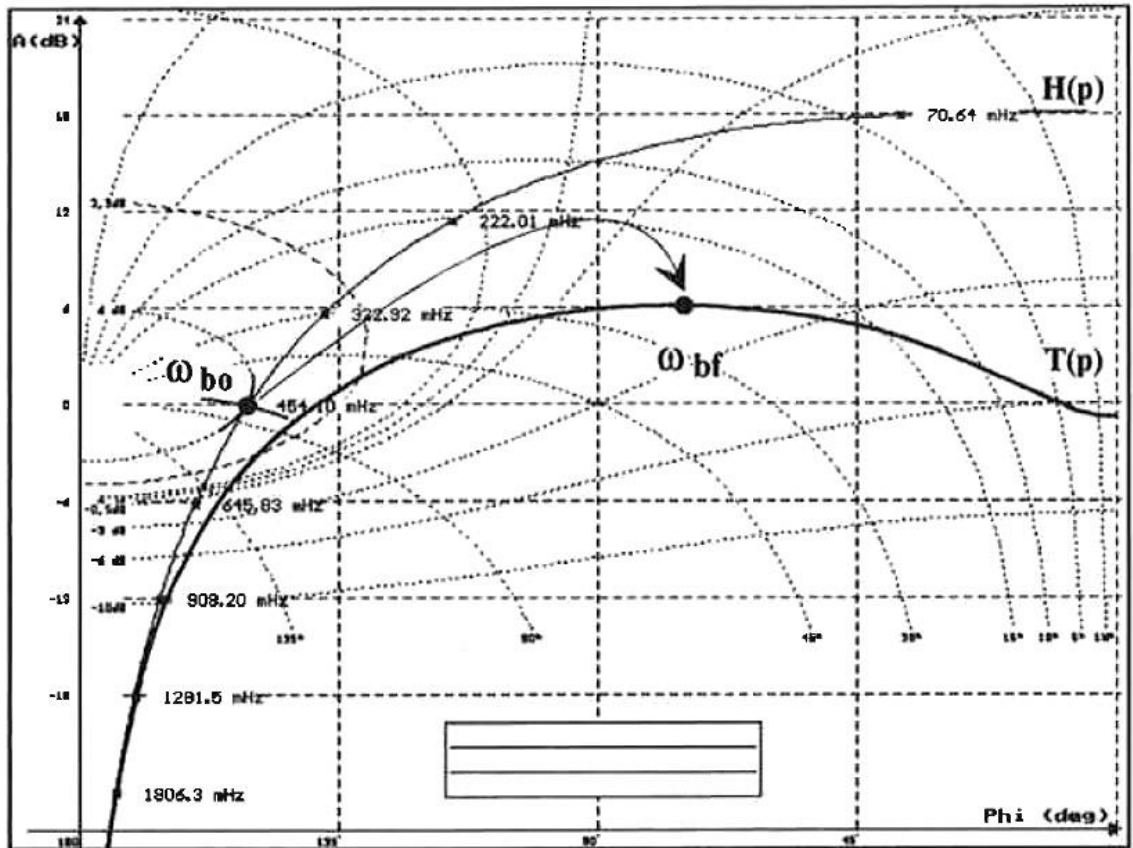


Utilisation de l'abaque de Black :

Il permet de tracer le diagramme d'un système en BF par un retour unitaire à partir du diagramme en BO.

Méthode : On trace la transmittance en boucle ouverte du système étudié (gain en dB et phase en degré) en se référant aux axes cartésiens. Ce lieu est paramétré en pulsation ω ou en fréquence f . Le diagramme de Black permet de déduire la fonction de transfert en boucle fermée par un retour unitaire, par lecture des gains et phases sur les courbes curvilignes.

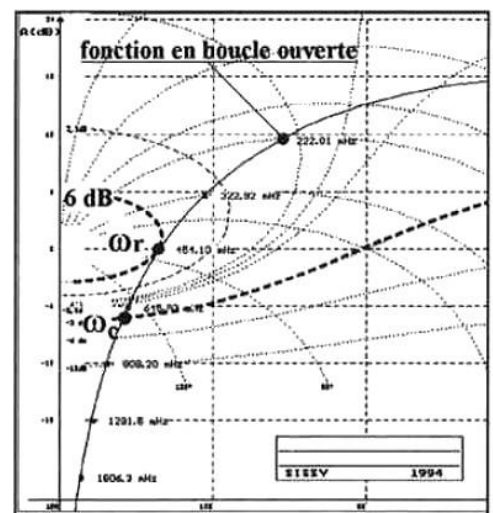
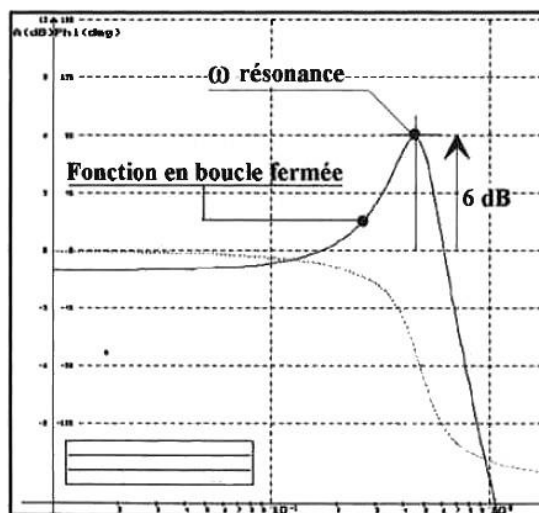
Exemple :



Résonance :

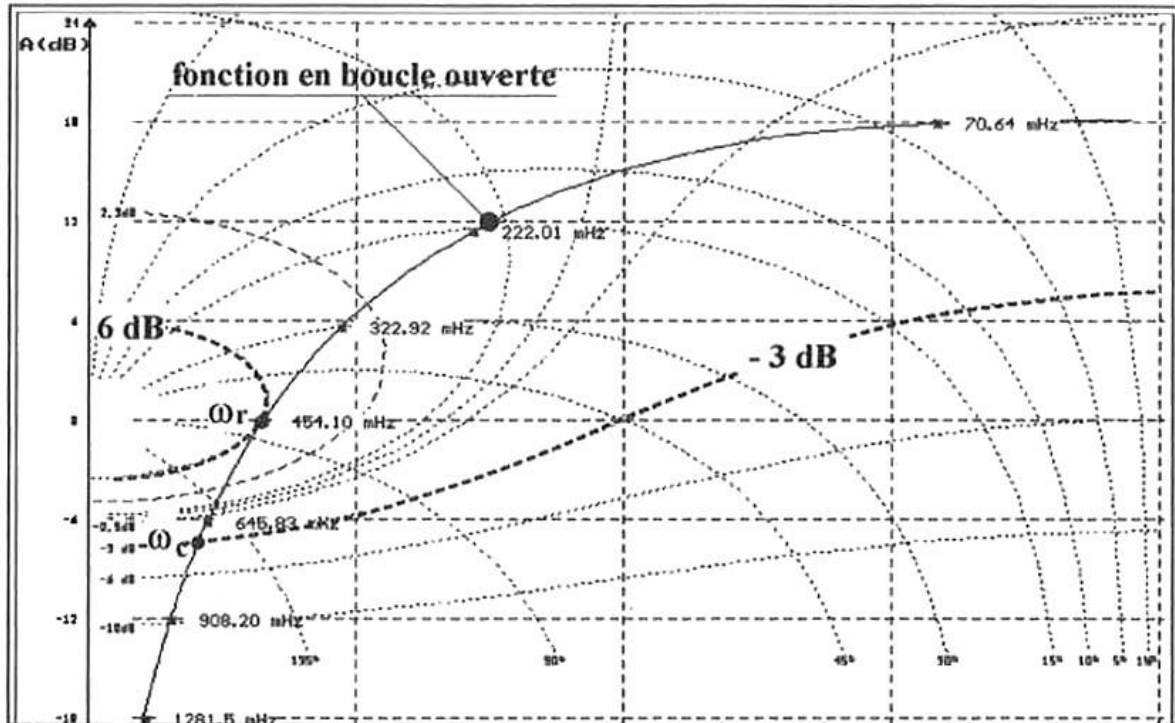
La résonance est définie par ω_r qui correspond à H_{max} avec $Q = \frac{H_{max}}{H_0}$

Comme l'abaque de Black permet de connaître la transmittance en BF, il suffit de chercher la tangente avec la courbe de gain constant le plus élevé pour avoir le gain maximum et ω_r en BF. Dans notre exemple :

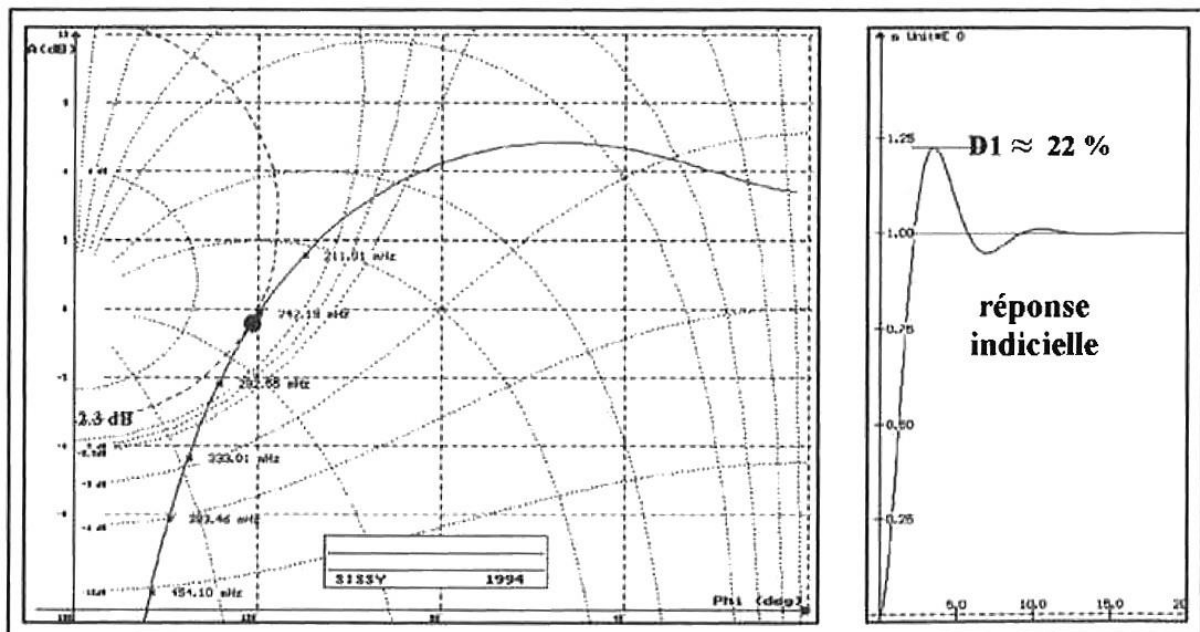


Bande passante :

La bande passante en BF est aussi donnée par la lecture du lieu de la fonction de transfert en BO. Elle est donnée par l'intersection de $H(p)$ avec la courbe à gain constant considéré. Par exemple, on lit ω_c pour la bande passante à -3dB.



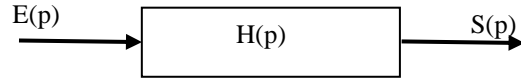
Remarque : La tangente avec le **contour de Hall (2.3dB)** prise comme critère de réglage, correspond, pour un système du deuxième dominant, à une surtension de **1,3**, à un amortissement d'environ **0,4** et à un dépassement d'environ **22%** pour une réponse indicielle.



Chapitre 7 : Systèmes particuliers

7. Intégrateur pur.

Soit $H(p)$ définie par $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$



$H(p)$ est un intégrateur pur si $H(p) = \frac{K}{p}$

Etudions $H(j\omega)$:

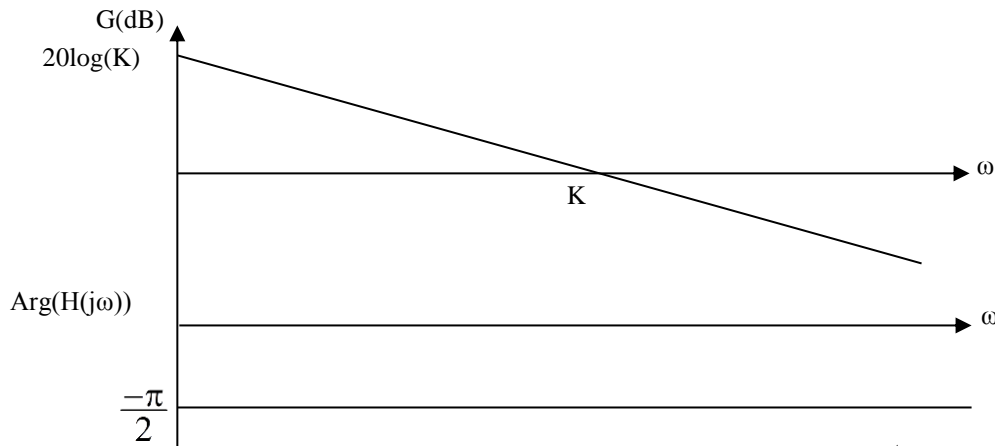
ω	0	K	∞
$\ H(j\omega)\ $	∞	1	0
$\text{Arg}(H(j\omega))$	$-\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/2$

1.1. Représentation dans Bode

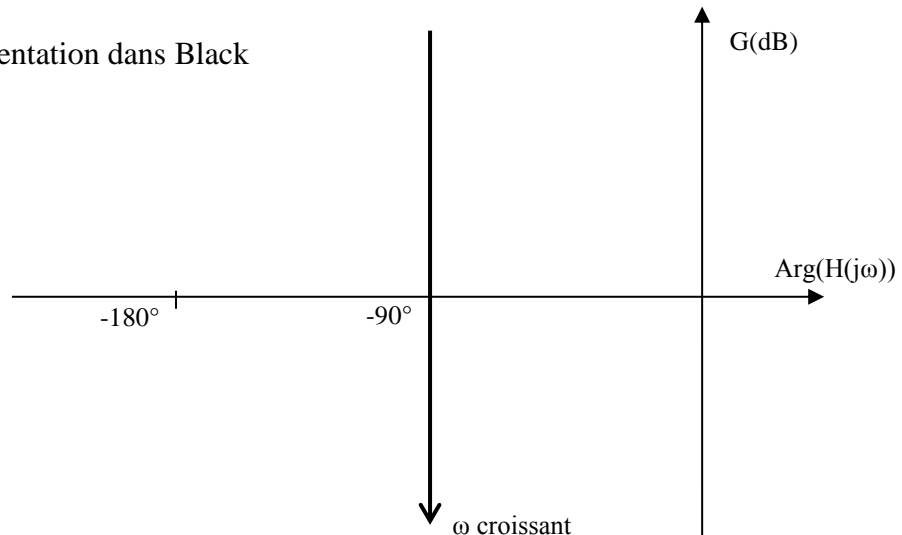
$$G = 20 \cdot \log \|H(j\omega)\| = 20 \cdot \log \left(\frac{K}{\omega} \right) = 20 \cdot \log(K) - 20 \cdot \log(\omega)$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

G coupe l'axe 0dB en $\omega = K$, et suit une pente de -20dB/décade .

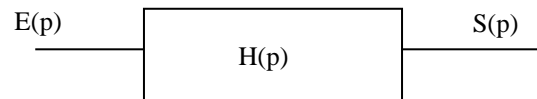


1.2. Représentation dans Black



8. Dérivateur pur.

Soit $H(p)$ définie par $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$



$H(p)$ est un dérivateur pur si $H(p) = K \cdot p$

Etudions $H(j\omega)$:

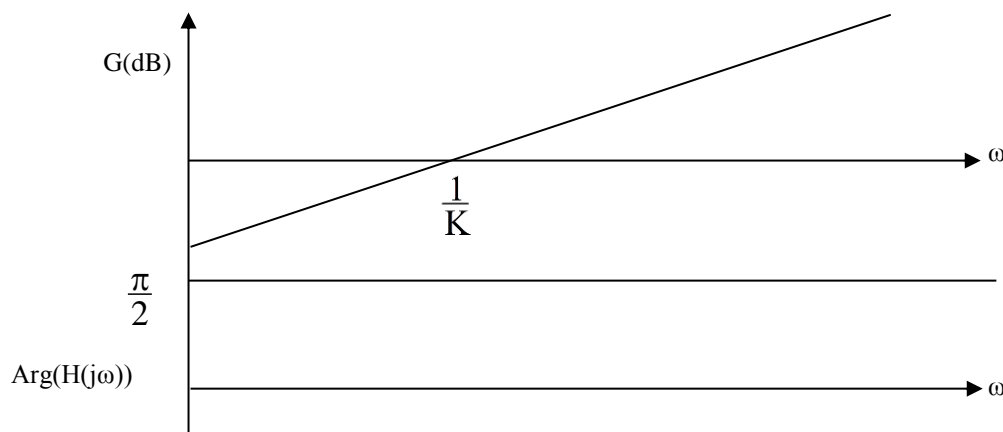
ω	0	$1/K$	∞
$\ H(j\omega)\ $	0	1	∞
$\text{Arg}(H(j\omega))$	$+\pi/2$	$+\pi/2$	$+\pi/2$

1.1. Représentation dans Bode

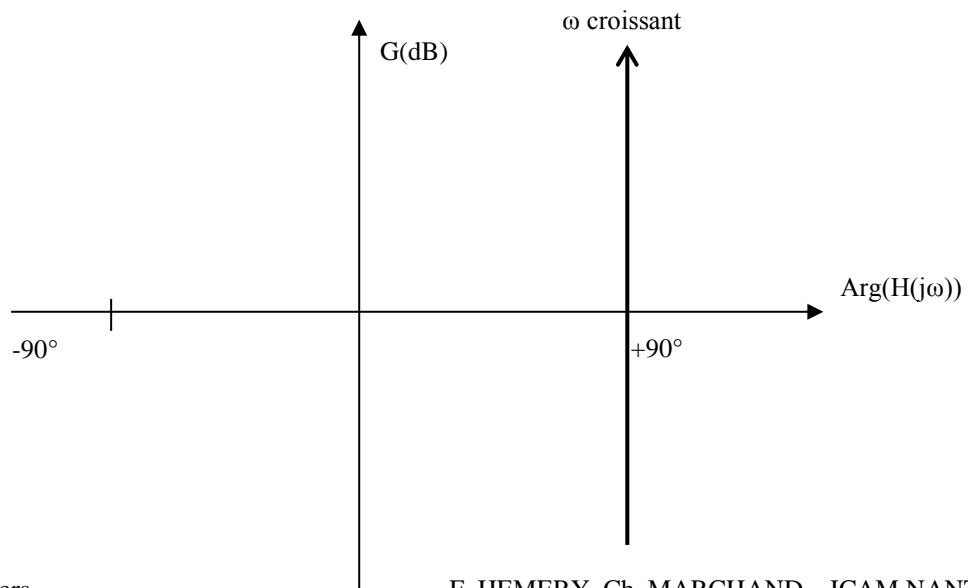
$$G = 20 \cdot \log \|H(j\omega)\| = 20 \cdot \log(K\omega) = 20 \cdot \log(K) + 20 \cdot \log(\omega)$$

$$\varphi = +\frac{\pi}{2}$$

G coupe l'axe 0dB en $\omega = \frac{1}{K}$, et suit une pente de +20dB/décade.



1.2. Représentation dans Black

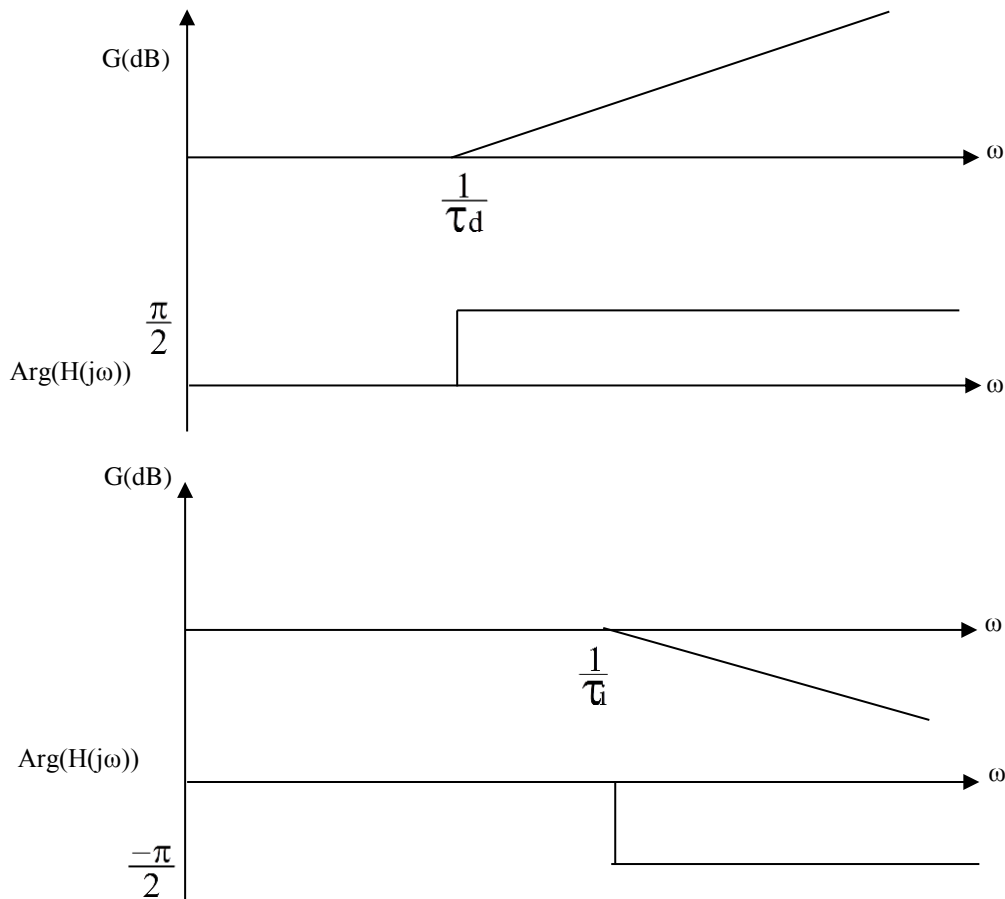


9. Remarques.

Il existe des montages intégrateurs ou dérivateurs différents :

- Si $H(p) = K_d(1 + \tau_d \cdot p)$ le système est dérivateur.
- Si $H(p) = \frac{K_i}{1 + \tau_i \cdot p}$ le système est intégrateur.

Ces circuits sont dotés d'une constante de temps, ce qui permet de décaler l'effet produit en ω de la valeur $\omega_d = \frac{1}{\tau_d}$ ou bien $\omega_i = \frac{1}{\tau_i}$.



10. Circuit à retard ou avance de phase.

4.1. Définition

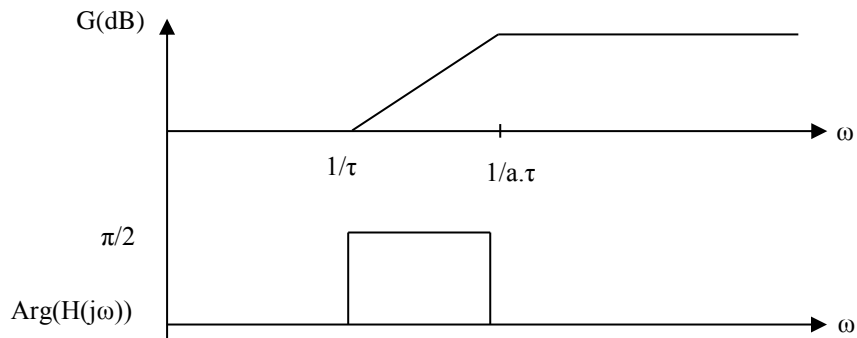
Ces circuits sont des circuits de la forme d'un premier ordre généralisé tel que $H(p) = \frac{1 + \tau \cdot p}{1 + a \cdot \tau \cdot p}$. La valeur de a déterminera s'il s'agit d'un circuit à avance ou à retard de phase. (plutôt dérivateur, ou plutôt intégrateur)

4.2. Circuit à avance de phase : $a < 1$

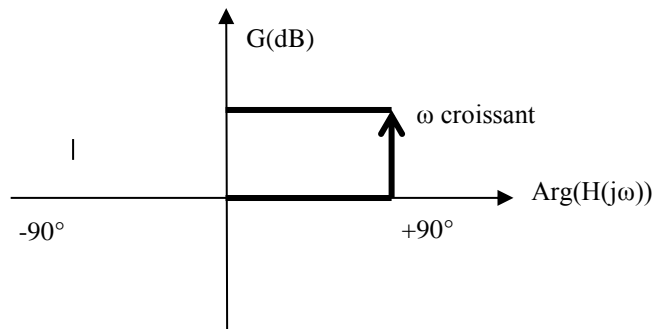
$$G = 20 \log \|H(j\omega)\| = 10 \log(1 + \tau^2 \omega^2) - 10 \log(1 + a^2 \tau^2 \omega^2)$$

$$\varphi = \arctan(\tau\omega) - \arctan(a\tau\omega)$$

4.2.1. Représentation dans Bode



4.2.2. Représentation dans Black

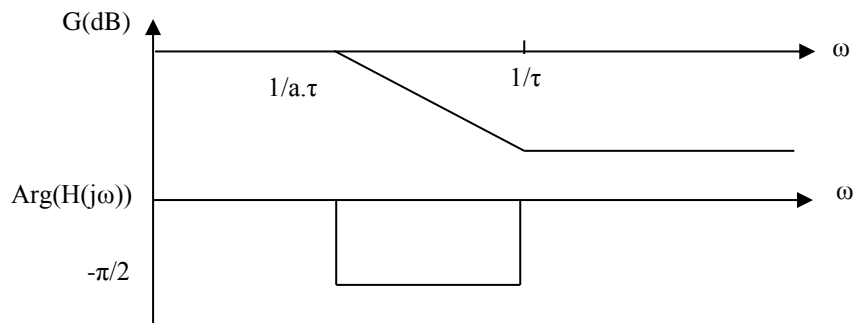


4.3. Circuit à retard de phase : $a > 1$

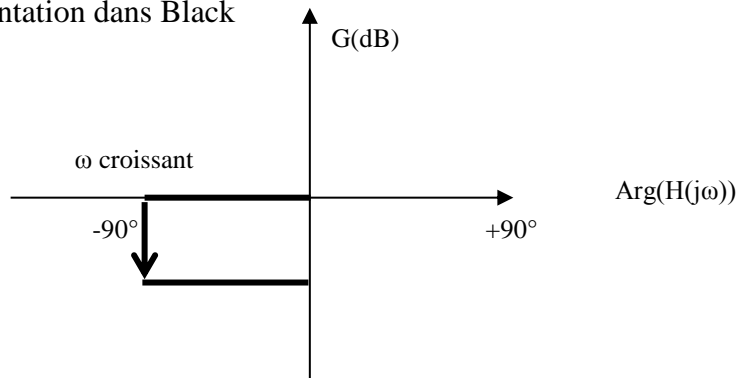
$$G = 20 \log \|H(j\omega)\| = 10 \log(1 + \tau^2 \omega^2) - 10 \log(1 + a^2 \tau^2 \omega^2)$$

$$\varphi = \arctan(\tau\omega) - \arctan(a\tau\omega)$$

4.3.1. Représentation dans Bode



4.3.2. Représentation dans Black



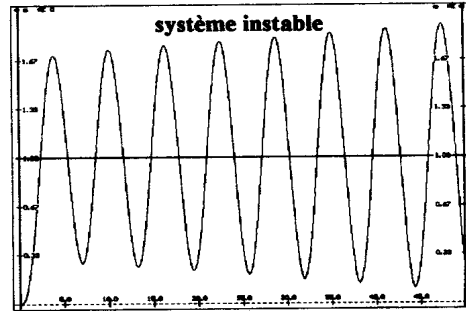
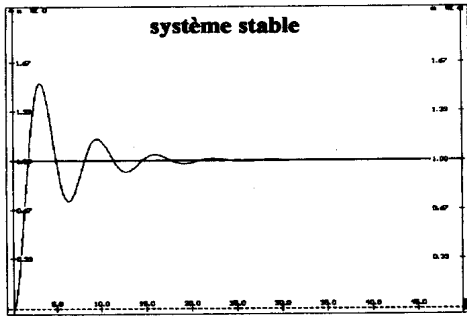
Remarque : Dans Black ce type de circuit permet de faire dévier une courbe représentative.

Chapitre 8 : Qualités et performances des systèmes continus asservis.

1. Définition.

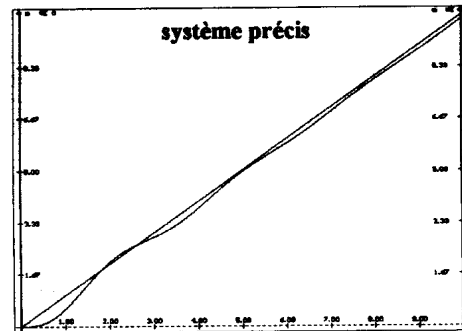
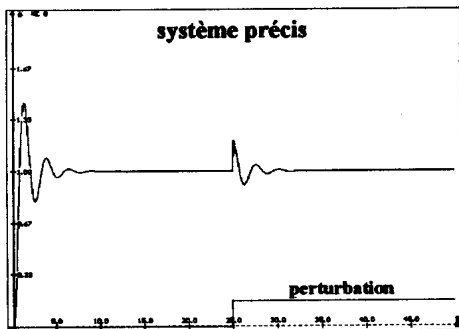
1.1 Stabilité :

Un système est stable, si pour une entrée $e(t)$ constante, la sortie du système tend vers une constante.



1.2. Précision :

Un système est dit précis si la sortie suit l'entrée en toutes circonstances.

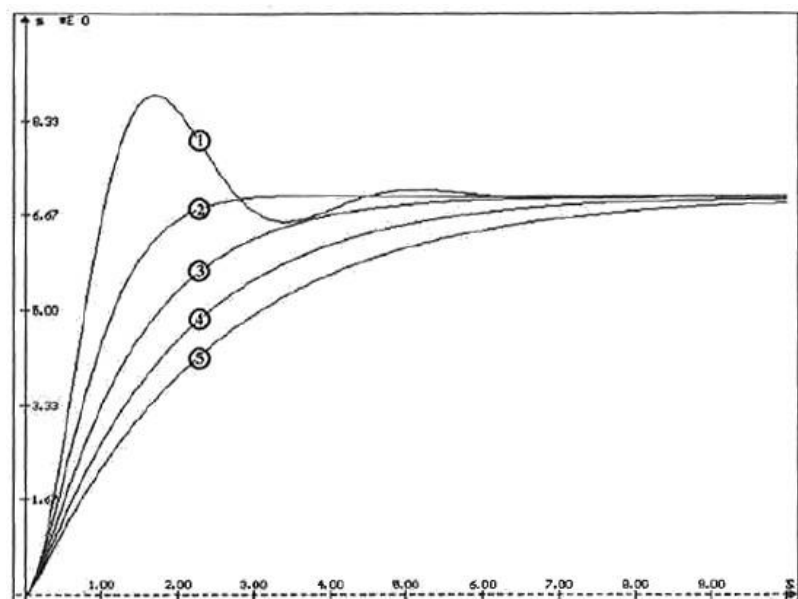


1.3. Rapidité :

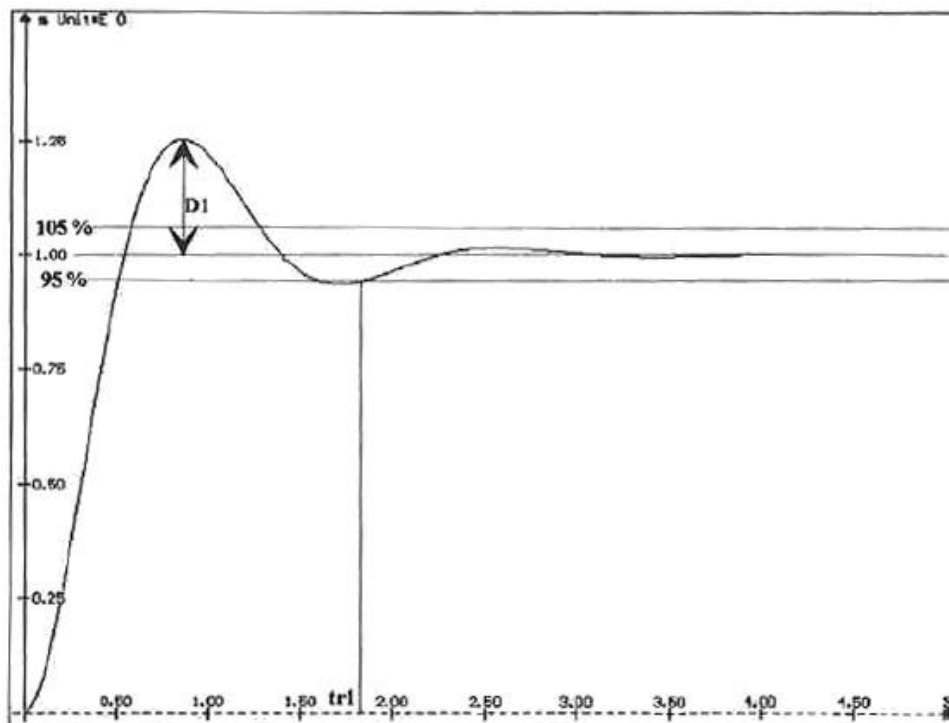
Un système à une rapidité satisfaisante s'il se stabilise à un niveau souhaité et constant en un temps jugé satisfaisant.

5 = système lent

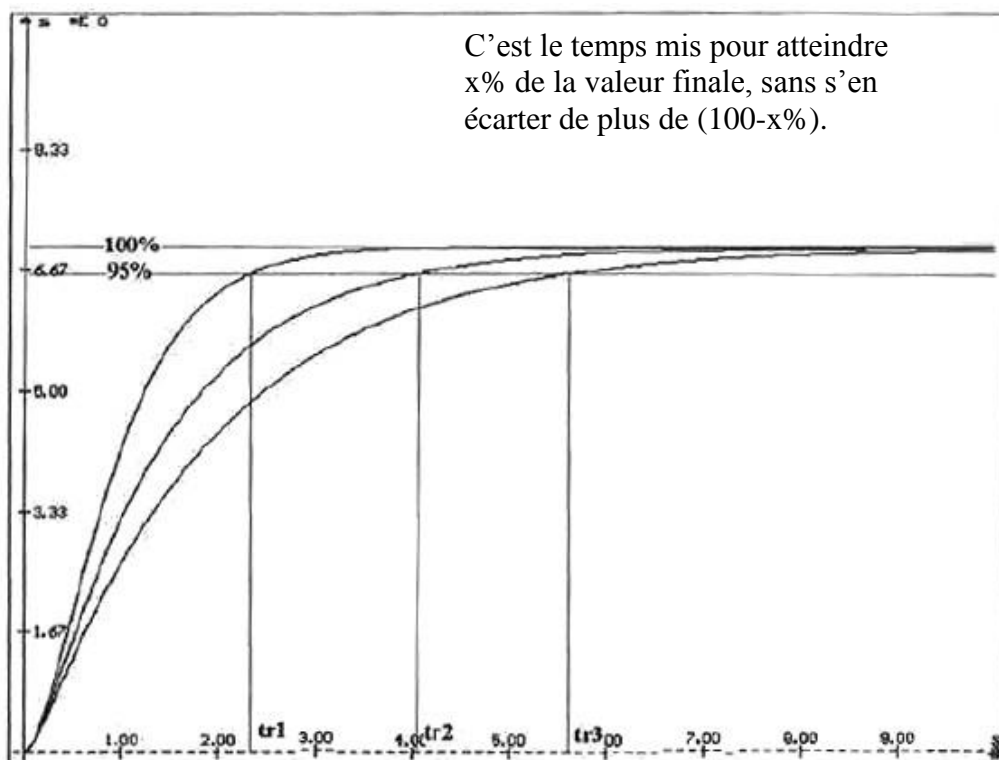
2 = système rapide



Remarque : Dans le cas d'un régime oscillatoire amorti, il existe deux éléments d'évaluation : tr_1 , le temps de réponse à 95%, et D_1 , la valeur du premier dépassement exprimé en %.



1.4. Temps de réponse :



1.5. Bande passante :

Lors de l'analyse harmonique, tous les systèmes physiques se comportent comme des filtres passe-bas. Si la fonction de transfert $H(p)$ ne contient pas d'intégrateur pur (K/p), nous avons : $H(0) = H(p)_{p=0} = K$

K est appelé le gain statique du système.

Il est possible de définir une bande de pulsation pour laquelle le rapport $H(j\omega) / H(0)$ reste supérieur à une valeur donnée. C'est la bande passante à l'intérieur de laquelle le signal n'est atténué au plus que de la valeur donnée.

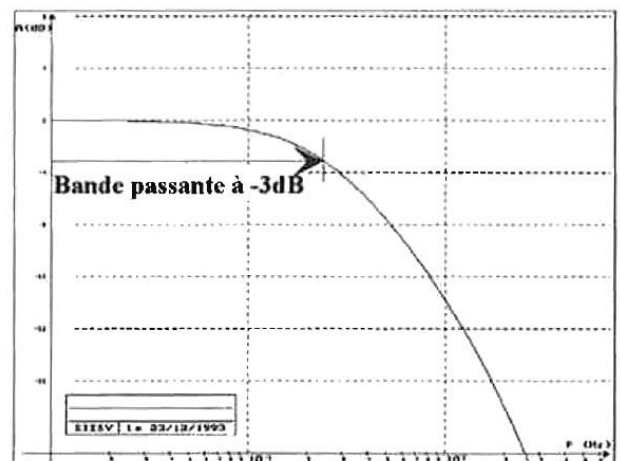
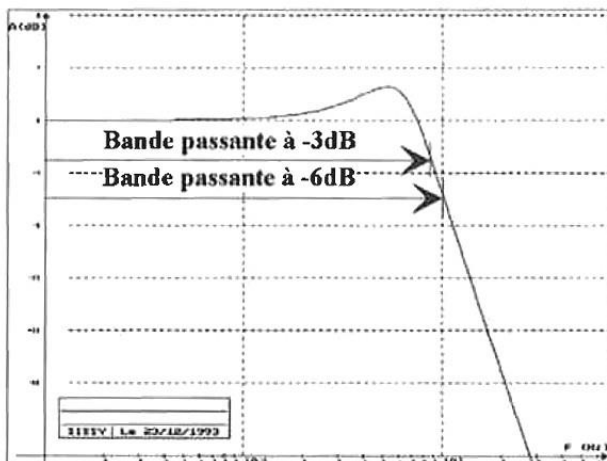
On peut donc définir :

Une bande passante à 3 dB $A(\omega)/K > 0.707$

Une bande passante à 6 dB $A(\omega)/K > 0.5$

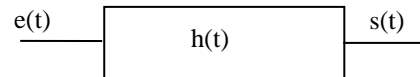
Remarque :

Dans le cas d'un système sans résonance, on définit une fréquence ou pulsation de coupure à -3dB (f_c ou ω_c)



2. Stabilité.

2.1. Rappels :



Un système continu est régi par une équation différentielle avec second membre reliant l'entrée à la sortie.

La sortie de ces systèmes est la solution de ce type d'équation. Elle est sous la forme d'une somme de deux contributions :

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t),$$

où : $S_1(t)$ est la solution générale de l'équation sans second membre, $S_2(t)$ est la solution particulière de l'équation avec second membre.

$S_1(t)$ est appelée réponse transitoire ou réponse libre du système.

Elle dépend des conditions initiales du système physique.

Pour que le système soit stable, il faut que cette contribution s'annule au bout d'un certain temps.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_1(t) = 0$$

$S_2(t)$ est appelée réponse forcée ou régime permanent du système.

Le régime permanent est un signal de même nature que le signal d'entrée.

Si $e(t)$ constante :	$S_2(t) = K$
Si $e(t) = a \cdot t$:	$S_2(t) = K \cdot a \cdot t$
Si $e(t) = e^{a \cdot t}$:	$S_2(t) = K \cdot e^{a \cdot t}$
Si $e(t) = a \cdot \sin(\omega t)$:	$S_2(t) = K \cdot a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Conclusion :

- $S_1(t)$ ne dépend que du système et de ses conditions initiales ;
- $S_2(t)$ est de même nature que $e(t)$;
- Dans les systèmes stables, le régime libre ($S_1(t)$) s'annule au bout d'un certain temps.

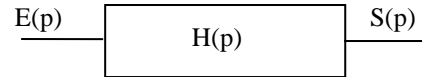
2.2. Définitions :

- Stabilité interne :
Un système est stable si et seulement si sa réponse libre tend vers 0 quand t tend vers l'infini.
- Stabilité externe :
Un système est stable si et seulement si une entrée d'une grandeur finie implique une sortie d'une grandeur finie.

Remarque : Pour un système linéaire, ces deux définitions sont équivalentes.

3. Conditions de stabilité.

Pour qu'un système soit stable, il faut que la réponse libre tende vers 0.



Par définition, on peut écrire H(p) en faisant apparaître les pôles et les zéros.

$$H(p) = \frac{(p-z_1) \cdot (p-z_2) \cdot \dots \cdot (p-z_n)}{(p-p_1) \cdot (p-p_2) \cdot \dots \cdot (p-p_n)} \quad \text{avec } z_i : \text{zéros de } H(p)$$

$$p_i : \text{pôles } H(p)$$

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) \text{ peut être mis sous la forme } S(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \cdot E(p) + \frac{N_0(p)}{D(p)}$$

ce qui permet de faire apparaître :

- $\frac{N(p)}{D(p)} \cdot E(p)$ le régime forcé de S(p)
- $\frac{N_0(p)}{D(p)}$ le régime libre de S(p).

On peut donc écrire que le système est stable si $\frac{N_0(p)}{D(p)}$ est amorti. L'étude de D(p), qui est le dénominateur de H(p) donne les conditions de stabilité.

Si a est un pôle de H(p), $D(p) = (p-a) \cdot (\dots)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{N_0(p)}{D(p)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-a)} \cdot \frac{N_0(p)}{(\dots)}\right) \quad \text{or,} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-a)}\right) = e^{at}$$

De plus, $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{at}) = 0$ si $a < 0$.

On peut donc conclure que pour que $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{N_0(p)}{D(p)}\right)$ tende vers 0, il faut nécessairement que a soit négatif.

Remarque : cas d'un pôle complexe.

Soit $p_1 = a + jb$, pôle complexe de $\frac{N_0(p)}{D(p)}$

$$\text{On peut écrire : } \frac{1}{(p-p_1)} = \frac{1}{p-(a+jb)} = \frac{1}{p+(-a-jb)}$$

$$\text{Or, } \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+(-a-jb)}\right) = e^{(a+jb)t} = e^{at} \cdot e^{jbt} = e^{at} \cdot (\cos(bt) + j \cdot \sin(bt))$$

Cette grandeur tend vers 0 si a est négatif.

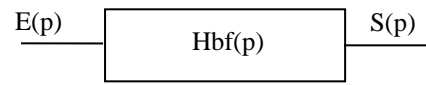
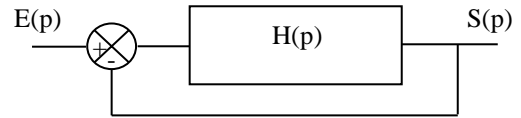
Le système sera stable si la fonction de transfert ne comporte que des pôles à partie réelle négative.

Application au système bouclé.

Soit un système de transmittance $H(p)$ en boucle fermée.

On peut écrire :

$$H(p) = \frac{K.N(p)}{D(p)} \text{ et } H_{bf}(p) = \frac{K.N(p)}{K.N(p)+D(p)} = \frac{K.N(p)}{D_{bf}(p)}$$



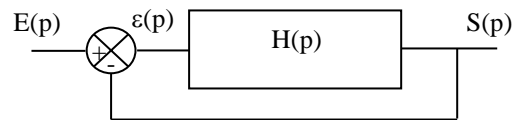
C'est l'étude de $D_{bf}(p)$ qui indiquera les conditions de stabilité en boucle fermée.
Avec D_{bf} : dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée.

Il existe plusieurs méthodes d'analyse :

- Méthode du critère de ROUTH : étudiées en ICAM
- Méthode du lieu des pôles (ou lieu d'EVANS).
- Méthode de la recherche de l'auto oscillation ou critère du revers.

4. Le critère du revers.

Le critère du revers est fondé sur l'étude du comportement du système lorsque l'entrée est nulle.



En effet, $S(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \cdot E(p) + \frac{N_0(p)}{D(p)}$, et la stabilité est donnée par le terme $\frac{N_0(p)}{D(p)}$.

Si $E(p)$ est nulle, $S(p)$ est non nulle si $\frac{N_0(p)}{D(p)}$ est non nul.

Recherchons les conditions pour que $S(p)$ soit non nulle lorsque $E(p)$ est nulle :

$$S(p) = H(p) \cdot \varepsilon(p) \text{ et } \varepsilon(p) = E(p) - S(p) = -S(p).$$

$$S(p) = -H(p) \cdot S(p) \text{ d'où } H(p) = -1.$$

Donc, il y a auto oscillation en régime harmonique si $H(j\omega) = -1$.

Or, $H(j\omega) = -1$ si $\|H(j\omega)\| = 1$ et $\arg(H(j\omega)) = \pm\pi$

Ces deux conditions sont nécessaires à l'existence de l'auto oscillation.
Ce sont les valeurs critiques de la stabilité.

Point critique :

$$\|H(j\omega)\| = 1 \text{ et}$$

5. Interprétation graphique.

Pour chacune des représentations des systèmes (Bode, Black, Nyquist), on place le point critique $\|H(j\omega)\| = 1$ et $\arg(H(j\omega)) = \pm\pi$.

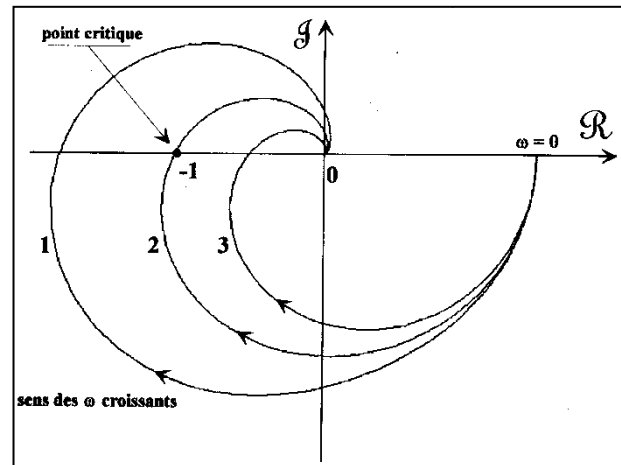
Si le tracé de la réponse passe par ce point, le système est instable pour la pulsation considérée.

On peut donc définir, à partir du critère du revers, des critères graphiques de stabilité pour chaque diagramme ou représentation.

(Cf document joint).

Critère du revers : Application graphique

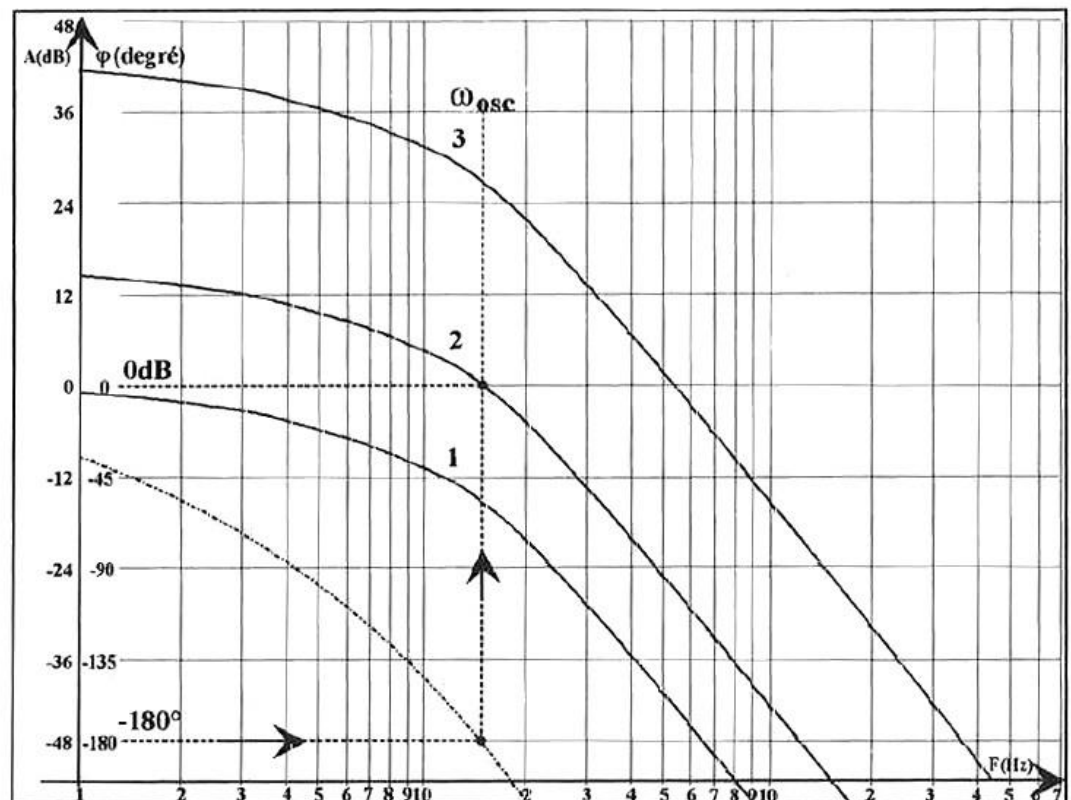
Dans le plan de Nyquist :



- 1 : Système instable
- 2 : Système juste stable
- 3 : Système stable.

Le système sera stable si, en parcourant le lieu de transfert de Nyquist dans le sens des ω croissants, on laisse le point critique (-1) sur la gauche.

Dans le plan de Bode

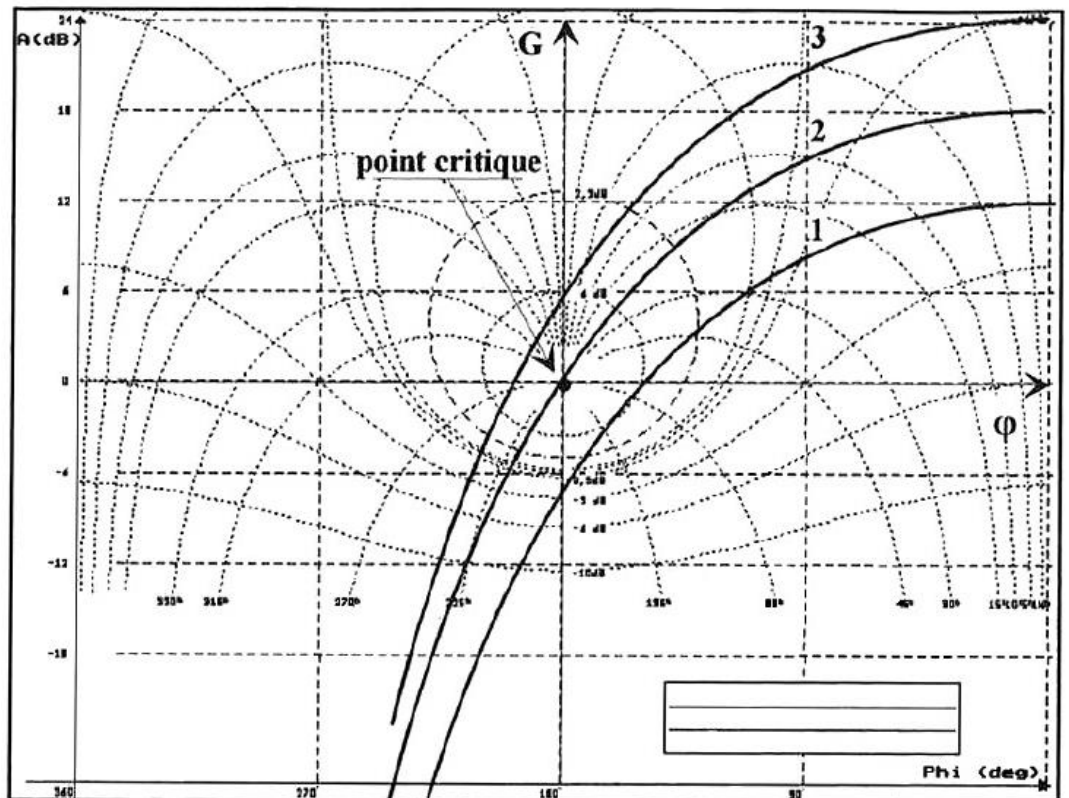


- 1 : Système stable
- 2 : Système juste stable
- 3 : Système instable.

Le système sera stable si, pour la pulsation ω_{osc} (qui correspond à $\text{Arg}[H(j\omega)] = -180^\circ$), la courbe d'amplitude passe en dessous du niveau 0dB.

Dans le plan de Black

- 1 : Système stable
- 2 : Système juste stable
- 3 : Système instable.



Le système sera stable si, en parcourant le lieu de transfert dans le sens des ω croissants, on laisse le point critique ($\varphi = -180^\circ$, $G=0\text{dB}$) sur la droite

6. Degré de stabilité.

Si l'équation d'un système le place à la limite de la stabilité, la réponse est très oscillante, et à la moindre dérive d'un composant, il peut devenir instable.

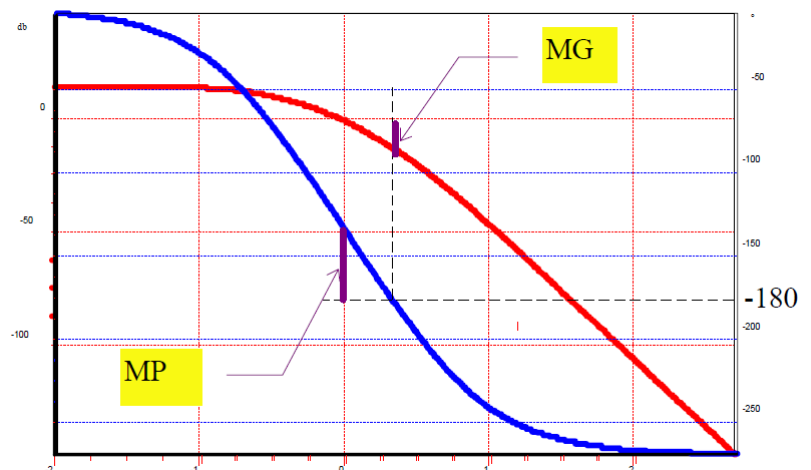
On prévoit donc des marges de phase et de gain, qui écarte la réponse du système du point critique d'une grandeur précisée dans le cahier des charges du système, afin de garantir la stabilité.

Définition :

- M_φ : marge de phase :
 $M_\varphi = 180^\circ + \text{Arg}(H(j\omega_1))$;
 avec ω_1 tel que
 $\|H(j\omega_1)\| = 1$ (0dB)

- M_g : marge de gain :
 $M_g = 20 \log \left(\frac{1}{\|H(j\omega_0)\|} \right)$

avec ω_0 tel que
 $\text{Arg}(H(j\omega_0)) = -180^\circ$

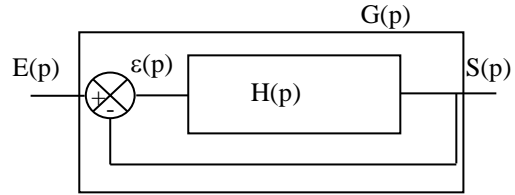


On adopte couramment comme réglage initial : $M_\varphi = 45^\circ$ et $M_g = 12 \text{ dB}$

7. Précision.

Cas d'un système à retour unitaire

Dans le cas d'une étude d'identification, on ne connaît que $E(p)$ et $S(p)$, reliés par $G(p)$.



On peut imaginer que $G(p)$ est la fonction de transfert en boucle fermée d'un système à définir.

$$\text{On peut écrire : } G(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

$S(p) = G(p) \cdot E(p)$, et $\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$

$$\text{On peut donc écrire : } \varepsilon(p) = E(p)(1 - G(p)).$$

$\varepsilon(p)$ est l'écart entre la sortie et l'entrée du système. L'objectif est que $\varepsilon(p)$ tende vers 0 pour t tendant vers l'infini.

On appelle ε_n l'erreur due à une entrée d'ordre n .

$$\mathcal{E}_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \mathcal{E}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p(E(p)(1 - G(p)))$$

Si $G(p)$ est du second ordre,

$$1 - G(p) = 1 - \frac{K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2} = \frac{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 - K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$$

$$\mathcal{E}_n = \lim_{p \rightarrow 0} p E(p)(1 - G(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p E(p) \frac{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 - K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$$

- Si $E(p) = \frac{A}{p}$ (Echelon) $\mathcal{E}_1 = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p} \frac{(1 - K) + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2} = A(1 - K)$

- Si $E(p) = \frac{A}{p^2}$ (rampe) $\mathcal{E}_2 = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^2} \frac{(1 - K) + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$

- Si $K=1$ $\mathcal{E}_2 = \frac{2\zeta}{\omega_n} \cdot A$

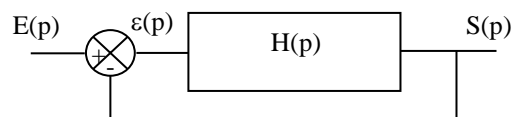
- Si $K < 1$ $\mathcal{E}_2 = +\infty$

- Si $K > 1$ $\mathcal{E}_2 = -\infty$

8.1. Influence de la structure du système sur la précision.

Soit $H(p) = \frac{S(p)}{\varepsilon(p)}$

$\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$



$$S(p) = H(p) \cdot \varepsilon(p) \quad \text{donc} \quad \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1+H(p)}$$

$$\varepsilon_n = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1+H(p)}$$

Soit $E(p) = \frac{A}{p^n}$, on peut écrire :

$$\varepsilon_n = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{A}{p^n} \frac{1}{(1+H(p))} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{A}{p^{(n-1)}} \frac{1}{(1+H(p))}$$

$H(p)$ peut se mettre sous la forme

$$H(p) = \frac{K(1+ap+bp^2+\dots)}{p^u(1+a'p+b'p^2+\dots)}$$

Avec :

- K : gain statique en boucle ouverte
- u : nombre d'intégrateur ($\frac{1}{p}$) dans la boucle ouverte.

Dans ces conditions, on peut écrire :

$$\varepsilon_n = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{A}{p^{n-1} \left(1 + \frac{K}{p^u}\right)} \quad \text{car} \quad \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1+ap+bp^2+\dots)}{(1+a'p+b'p^2+\dots)} = 1$$

La relation entre u et n va donc déterminer ε_n .

- $n-1 > u$: $\Rightarrow \varepsilon_n \rightarrow \infty$
- $n-1 = u$: \Rightarrow
 - $n=1$ $\varepsilon_n = \frac{A}{1+K}$
 - $n>1$ $\varepsilon_n = \frac{A}{K}$
- $n-1 < u$: $\Rightarrow \varepsilon_n \rightarrow 0$

On peut résumer ces résultats dans un tableau, en appelant classe le nombre d'intégrateurs dans la boucle (u).

Erreur en fonction de la classe du système et de l'entrée :

Classe Entrée	0	1	2	3
Echelon $e(t) = A$	$\frac{A}{1+K}$	0	0	0
Rampe $e(t) = At$	∞	$\frac{A}{K}$	0	0
Accélération $e(t) = At^2$	∞	∞	$\frac{A}{K}$	0
$e(t) = At^3$	∞	∞	∞	$\frac{A}{K}$

Les conditions de précision nous imposent un nombre d'intégrateur dans la BO.

Chapitre 9

Les Correcteurs

3. Mise en situation.

On a vu les performances des systèmes asservis, le concepteur fixera notamment :

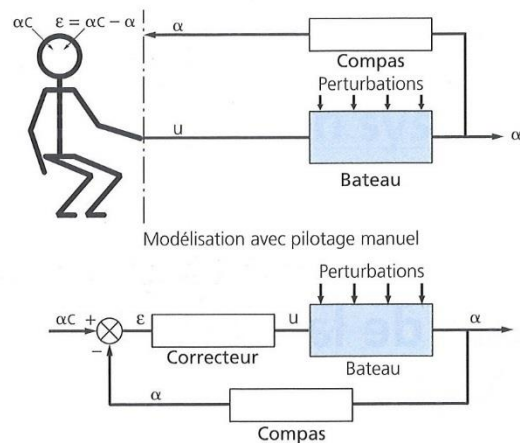
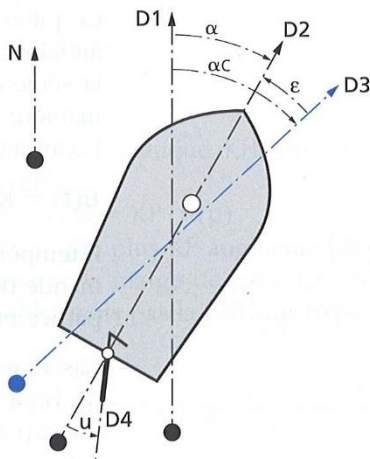
- La rapidité : sous forme d'un temps de réponse à 5% (ou autre),
- La précision : sous forme relative (en% de l'entrée) ou absolue pour une entrée donnée,
- Les dépassements : sous forme de limite admissible (souvent les dépassements sont interdits)
- La stabilité : sous forme de marge de gain et marge de phase.

Ce dernier critère est toujours primordial.

Pour introduire la notion de correcteur, examinons la commande de cap d'un voilier.

Le cap réel est α , le cap à suivre est α_c .

Pour permettre au voilier de suivre α_c , le barreur établit un angle de gouvernail u , avec $u(t) = f(\varepsilon(t))$.



- **Commande en Tout ou Rien :** $u(t) = U_{\max} \cdot \text{signe}(\varepsilon(t))$

Le barreur dispose la barre à l'une des extrémités sans nuance, très inconfortable pour les passagers !

- **Commande simple :** $u(t) = K_p \cdot \varepsilon(t)$

L'angle $u(t)$ est proportionnel à l'écart, c'est une commande Proportionnelle (P).

- **Commande plus élaborée :**

Pour essayer d'anticiper les variations de direction du navire, le barreur tient compte de l'écart $\varepsilon(t)$

mais aussi de la manière dont varie cet écart : $u(t) = K_p \cdot \varepsilon(t) + K_d \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$

Cette commande est une commande Proportionnelle Dérivée (PD).

- **Commande sophistiquée :**

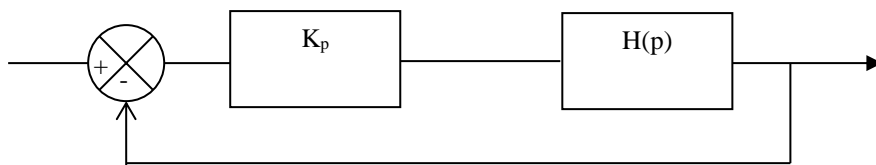
Le pilote tient compte de l'écart $\varepsilon(t)$, de la variation de l'écart $\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$, mais aussi de la qualité du

suivi du cap (le cap, au cours de la commande, est plus souvent négatif ou positif) en ajoutant une action intégrale : Σ des écarts.

$u(t) = K_p \cdot \varepsilon(t) + K_d \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + K_i \cdot \int_0^T \varepsilon(t) dt$ Cette commande est Proportionnelle Intégrale Dérivée (PID).

La construction de ce type de commande se fait par l'adjonction successive de correcteurs de type P, D, ou I en prenant en compte l'action de chacun.

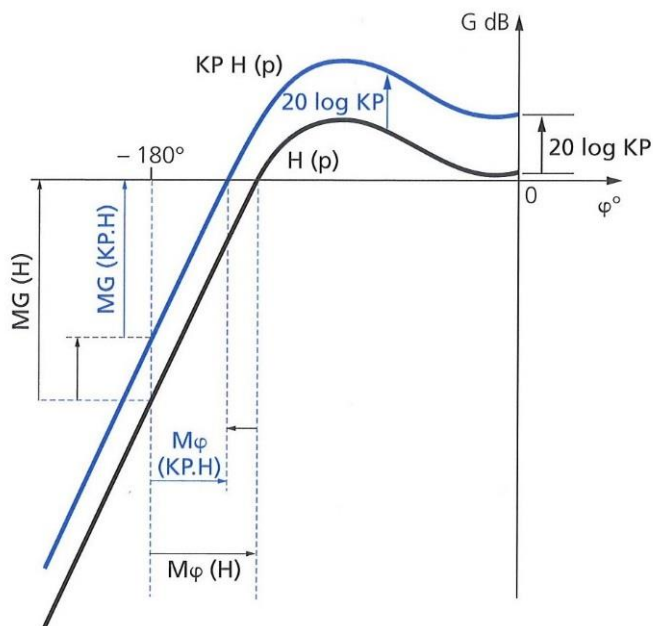
4. Correction Proportionnelle.



- Influence de K_p sur la stabilité : (critère essentiel)
Raisonnons sur le diagramme de Black de la fonction de transfert ($H(p)$).

Si K_p augmente,
On augmente
la rapidité et
la précision statique
le dépassement

On diminue les marges
de phase et de gain.
donc
On diminue la stabilité !!



Correction proportionnelle	Marges de stabilité	Précision	Rapidité	Dépassement
Si K_p ↗	↘	↗	↗	↗ ou apparaissent

Le réglage de gain se fait à partir des performances recherchées :

Précision et rapidité maximales

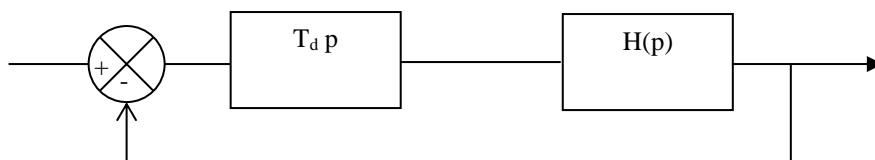
Dépassement admissible

Stabilité définie par marge de gain $MG \geq 10\text{dB}$ et marge de phase $M_\phi \geq 45^\circ$

5. Correction Dérivée.

$$C(p) = T_d p$$

En statique, aucun effet !



En dynamique, l'exemple du barreur de voilier illustre que l'action dérivée est anticipatrice et donc stabilisante.

Remarque : un dérivateur pur est un composant dont le gain tend vers l'infini lorsque la pulsation tend vers l'infini ! Difficilement réalisable. L'action dérivée ne sera réalisée que dans une gamme de pulsations uniquement, en utilisant un correcteur à avance de phase.

6. Correction intégrale.

Dans le chapitre 8, concernant les performances des systèmes asservis, nous avons vu que la présence d'intégrateurs purs $1/p$ dans la FTBO améliore grandement la précision (statique).

Cependant en dynamique, l'argument constant et égal à -90° déstabilise énormément le système. De plus, pour $\omega=0$, le gain tend vers l'infini !

D'où, si le système est de classe 0, on peut utiliser un intégrateur pur, sinon on utilisera un correcteur à retard de phase.

7. Circuit à avance ou à retard de phase

Définition : Circuit dont la fonction transfert est de la forme

$$C(p) = K \frac{1 + \tau p}{1 + a\tau p}$$

Module : pour $K = 1$

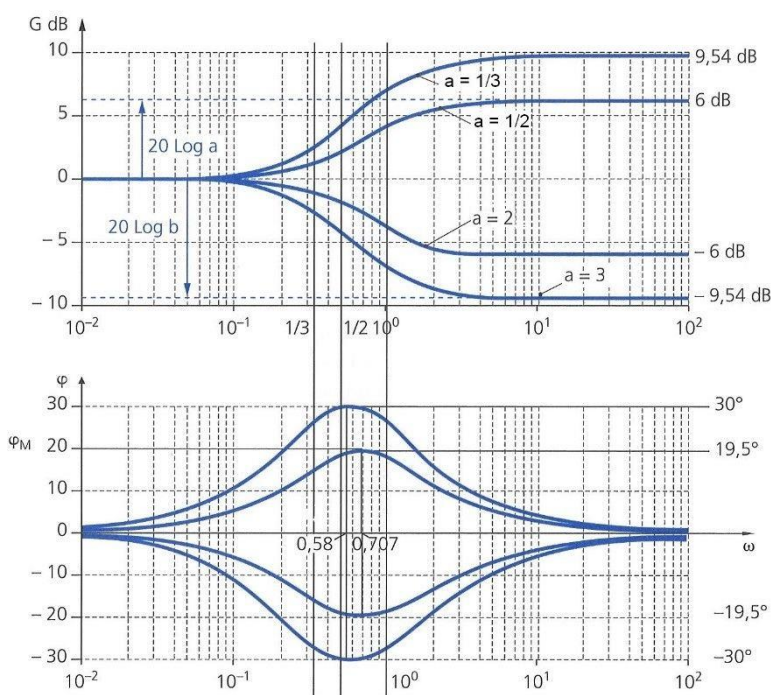
$$\|C(j\omega)\| = 10 \log(1 + \tau^2 \omega^2) - 10 \log(1 + a^2 \tau^2 \omega^2)$$

Argument :

$$\text{Arg}(C(j\omega)) = \arctan(\tau\omega) - \arctan(a\tau\omega)$$

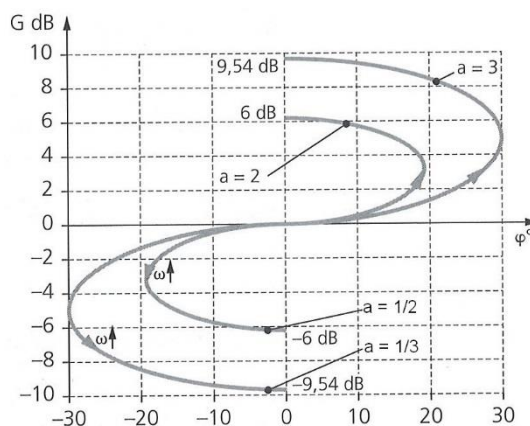
On note : $\text{Arg}(C(j\omega)) = \varphi$

Représentation dans Bode :



Représentation dans Black

pour $\tau = 1$ et $K = 1$



4.4. Effets :

Si $\underline{a < 1}$: Circuit à avance de phase (Action dérivée)

Si $\underline{a > 1}$: Circuit à retard de phase (Action intégrale)

Ces circuits permettent de « déformer » localement le lieu de transfert et ainsi s'il est bien placé, modifier la marge de phase d'un système.

Ce déphasage maximum est obtenu en recherchant l'extremum de l'argument :

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{d(\arctan(\tau\omega) - \arctan(a\tau\omega))}{d\omega} = \frac{\tau}{1 + (\tau\omega)^2} - \frac{a\tau}{1 + (a\tau\omega)^2} = 0$$

$$\omega_M = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$$

$$C(j\omega) = \left(\frac{1 + \tau\omega j}{1 + a\tau\omega j} \right) = \frac{1 + a\tau^2\omega^2}{1 + a^2\tau^2\omega^2} + j \frac{\tau\omega(1 - a)}{1 + a^2\tau^2\omega^2}$$

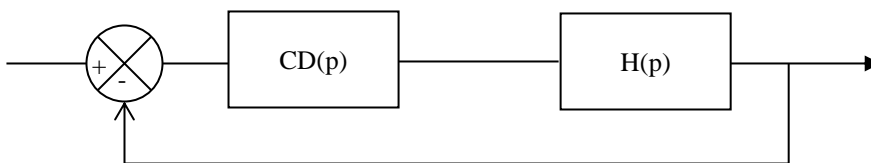
Déphasage maximum :

$$\tan(\varphi_M) = \frac{\tau\omega_M(1 - a)}{1 + a\tau^2\omega_M^2} = \frac{1 - a}{2\sqrt{a}}$$

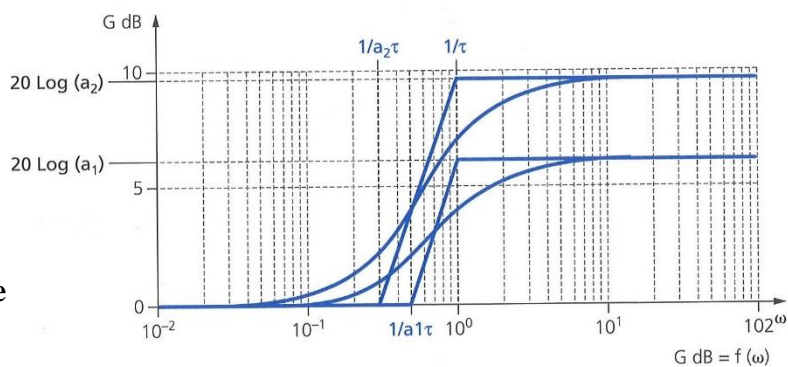
On peut aussi exprimer $\sin(\varphi_M) = \frac{1-a}{1+a}$ ou même $a = \frac{1-\sin(a)}{1+\sin(a)}$

Correcteur à avance de phase (dérivé)

$$CD(p) = K \frac{1 + \tau p}{1 + a\tau p}; \text{ avec } a < 1$$



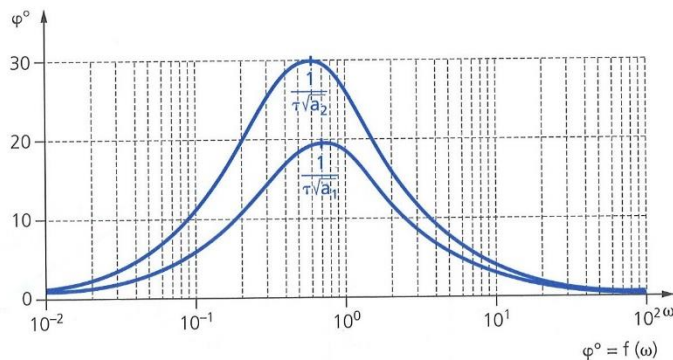
Lieu dans Bode, $a_1 = 1/2$; $a_2 = 1/3$



Ce diagramme présente deux exemples de correcteurs dérivés, appelés à **avance de phase** (leur argument est positif).

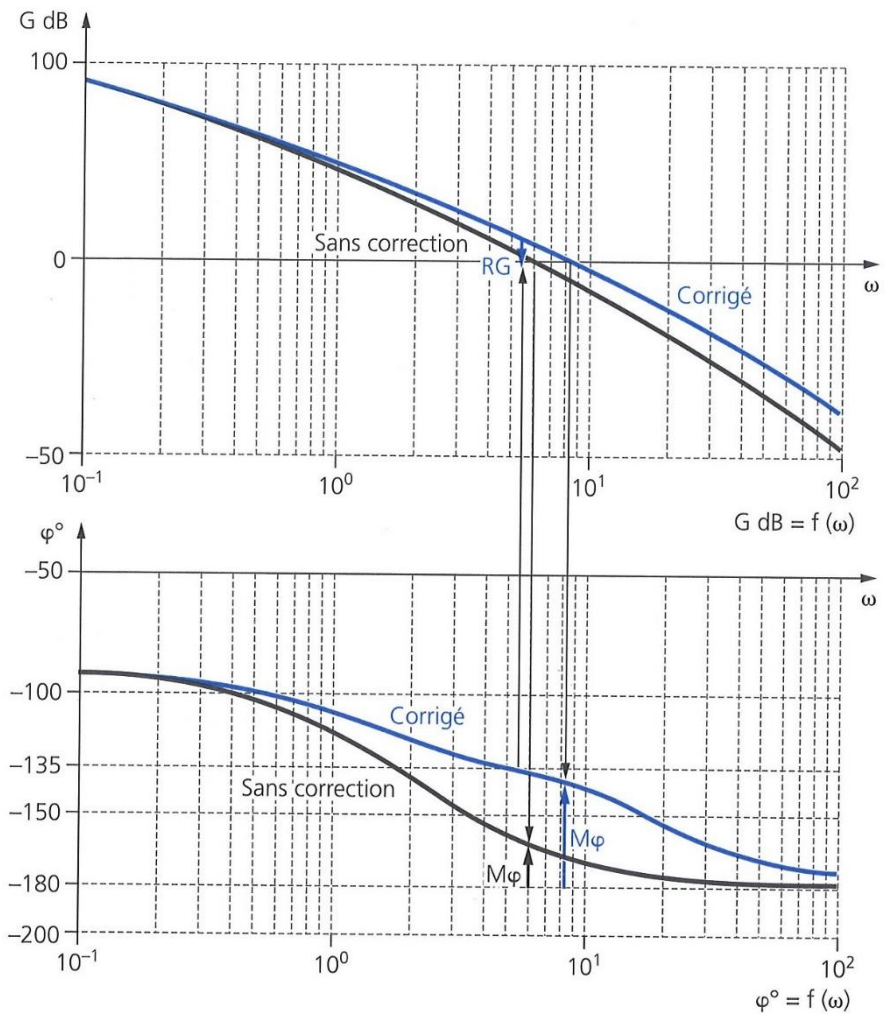
La valeur $\omega_c = 1/\tau$ sépare deux zones :

- $\omega < \omega_c$: le gain est peu modifié alors que la phase présente un extremum positif (avance de phase). On choisit donc ω_c pour que le point critique soit dans cette zone, ce qui augmente la marge de phase.
- $\omega > \omega_c$: le gain est augmenté ($20 \log(a)$), réduisant la marge de gain si le point critique est dans cette zone, à éviter donc !



On choisira ω_c telle que $1/\tau$ soit peu différent de ω_{0dB} et a tel que $\sin(\varphi_M) = \frac{1-a}{1+a}$ donne l'augmentation de marge de phase recherchée.

Exemple : $H(p) = \frac{20}{p(1+0.5p)}$ $CD(p) = K \frac{1+0.21p}{1+0.07p}$



Sur le lieu de Bode ci-dessus, la courbe représente $CD(p)H(p)$

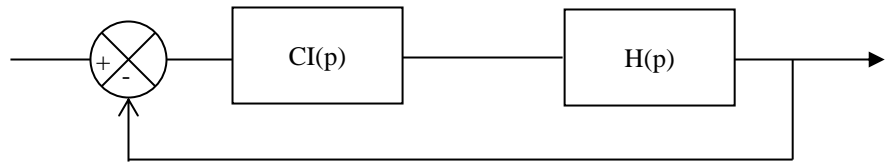
- Augmentation sensible de la marge de phase & Réduction de la réserve de gain

Bilan : une bonne action dérivée a les effets suivant :

Correction	Marges de stabilité	Précision	Rapidité	Dépassement
DERIVEE	↗	↘ faiblement	↗	↘ faiblement

Correcteur à retard de phase (intégral)

$$CI(p) = K \frac{1 + \tau p}{1 + b\tau p}; \text{ avec } b > 1$$

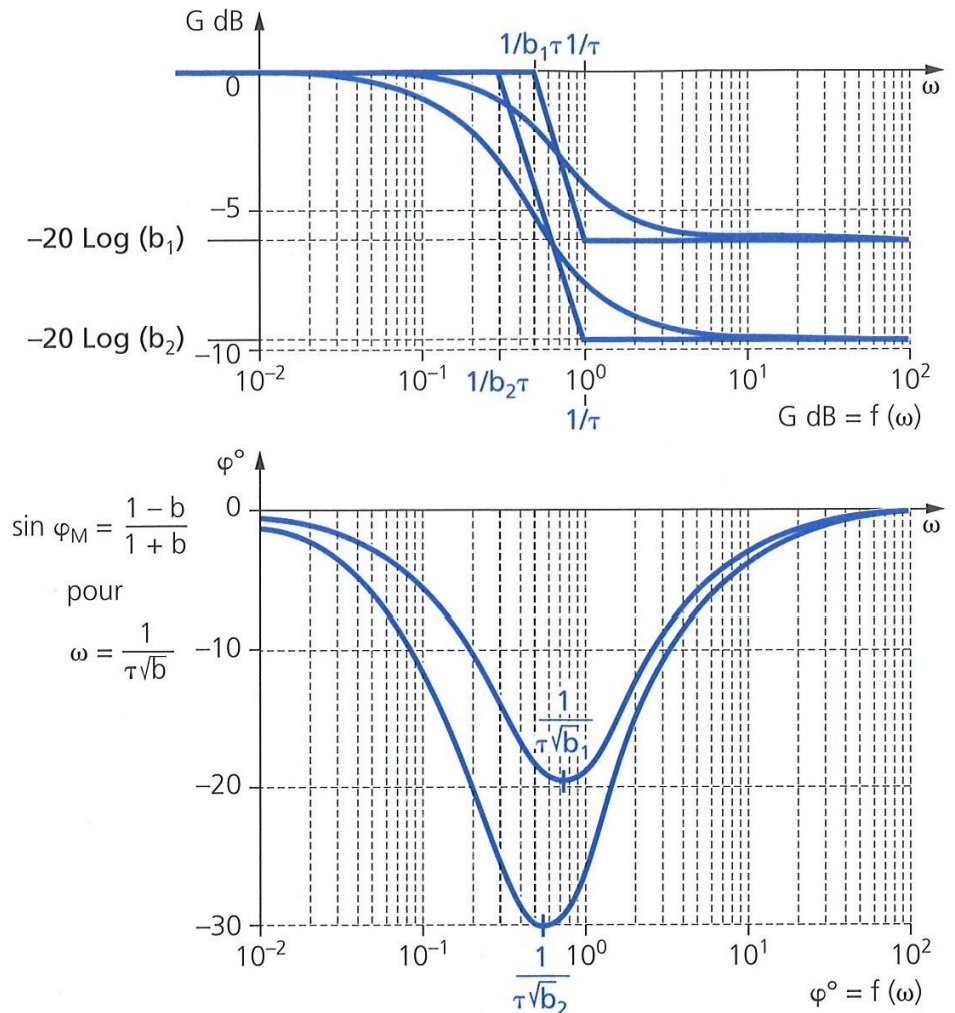


Objectif : augmenter le gain en basse fréquence sans modifier la stabilité
Lieu dans Bode, pour $\tau = 1$ et $b_1 = 2$ et $b_2 = 3$

Ce diagramme présente deux exemples de correcteurs intégral, appelés à **retard de phase** (leur argument est négatif).

La valeur $\omega_c = 1/\tau$ sépare deux zones :

- $\omega < \omega_c$: le gain est peu modifié alors que la phase présente un extremum négatif (retard de phase) qui peut pénaliser la stabilité si le point critique de la FTBO du système corrigé se trouve dans cette zone.
- $\omega > \omega_c$: le gain est réduit ($20 \log(b)$), augmentant la marge de gain si le point critique est dans cette zone, alors que la phase est nulle et donc ne modifie pas la phase de la FTBO corrigée. Il est donc intéressant de placer de telle sorte que le correcteur intégral augmente la réserve de gain dans la zone critique en évitant de placer le déphasage supplémentaire inévitable dans la zone du point critique.



On choisira ω_c telle que $1/\tau$ soit très inférieure à ω_{0dB} et b tel que $20 \log(b)$ soit égal à la variation de gain en BO recherchée.

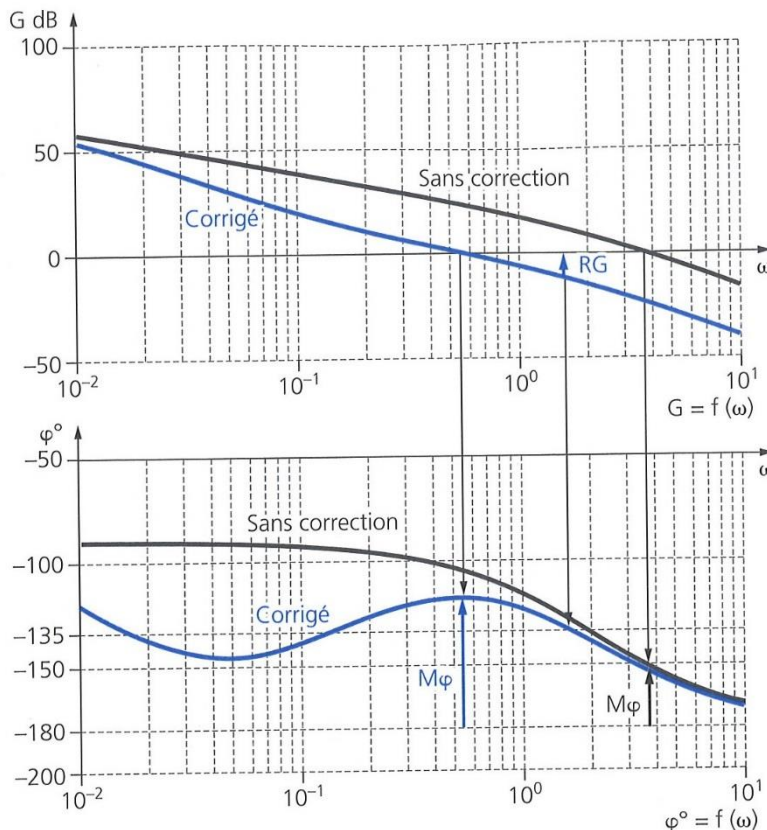
Exemple :

$$H(p) = \frac{8}{p(1 + 0.5p)}$$

$$CI(p) = K \frac{1 + 7.p}{1 + 70.p}$$

Sur le lieu de Bode ci-contre, la courbe représente $CI(p)H(p)$

- Augmentation de la réserve de gain.
- Augmentation de la marge de phase à gain constant qui passe de 35° à 60° .



Bilan : une bonne action intégrale a les effets suivant :

Correction	Marges de stabilité	Précision	Rapidité	Dépassement
INTEGRALE	↗	↗	↘	Peu d'influence

8. Correcteurs composés PID :

Il est évidemment intéressant de composer ces trois actions sur un correcteur. C'est de plus une solution industriellement avantageuse. Les constructeurs créent une carte de commande paramétrable comprenant ces trois actions PID adaptables à chaque application.

8.1. Expression d'un correcteur PID

$$\varepsilon_c(p) = KP \varepsilon(p) + \frac{KI}{p} \varepsilon(p) + KD p \varepsilon(p)$$

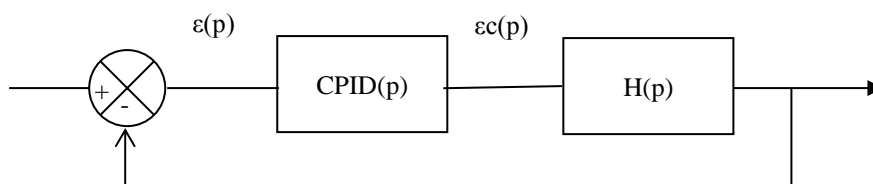
Fonction transfert du correcteur :

$$CPID(p) = \frac{\varepsilon_c(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{KP p + KI + KD p^2}{p}$$

Type 1 : théorique,

Dans la pratique on prendra : $CPID(p) = KP \left(\frac{1 + \tau_i p}{1 + b \tau_i p} \right) \cdot \left(\frac{1 + a \tau_d p}{1 + \tau_d p} \right)$ avec $a > 1$; $b > 1$;

τ_i et τ_d constantes de temps. Type 2




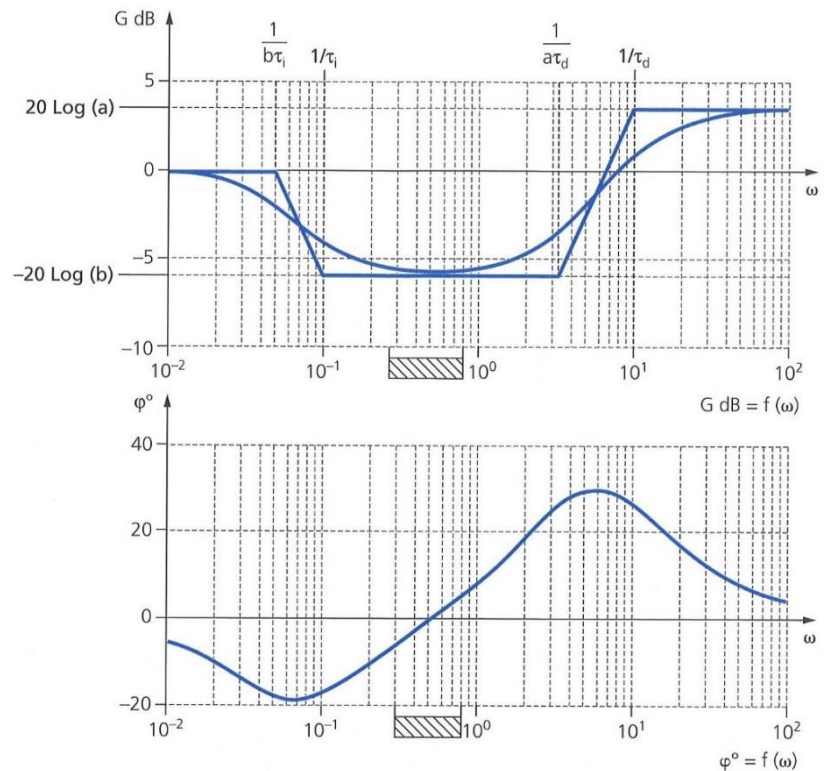
8.2. Diagramme de Bode d'un PID :

Diagramme de Bode d'un PID :

Exemple : $K_P = 1$; $\tau_i = 10\text{s}$; $\tau_d = 0.1\text{s}$; et $a = 3$:

Dans ce cas $\tau_i > \tau_d$, la courbe de gain présente un creux qui correspond à une atténuation de gain aux pulsations intermédiaires. Le réglage de K_P permet de modifier le niveau de ce palier de gain intermédiaire.

 zone où il est intéressant de placer le point critique.



9. Conclusion :

La correction des systèmes asservis permet d'améliorer la qualité des systèmes bouclés. Les performances recherchées peuvent être affinées par l'introduction d'un correcteur peu couteux en énergie.

La technique consiste tout en maintenant des marges de stabilité satisfaisantes, à déformer les courbes de transfert en augmentant le gain en basses fréquences afin d'améliorer la précision et la rapidité. Il ne faut pas oublier les éventuels dépassements, surtout sur les grandeurs mécaniques.

Il ne faut pas imaginer que le correcteur va palier les défauts de conception ou de réalisation du processus !