

Chapitre 1 :

Introduction aux systèmes asservis.

Un système automatique est un dispositif qui génère l'état d'une ou plusieurs sorties en fonction de l'état d'une ou plusieurs entrées.

En fonction du système, les grandeurs caractéristiques d'entrée et de sortie peuvent être binaires (tout ou rien), analogiques ou numériques (combinaisons de variables tout ou rien).

1. Généralités, historique et classification des différents types de systèmes automatiques.

a. Système combinatoire.

La ou les variables de sortie sont commandées par le niveau logique d'une ou plusieurs combinaisons logiques des variables d'entrées.

S'il fait nuit, alors on allume la lumière.

Cette logique fait appel aux travaux du mathématicien anglais George BOOLE qui publie en 1847 « Mathematical Analysis of Logic » (dans cette publication il soutient que la logique doit être rattachée aux mathématiques et non à la philosophie comme c'était le cas à l'époque).

b. Système séquentiel.

Les variables de sortie sont commandées par un processus organisant l'ordre des sorties. L'état des variables d'entrée n'est plus le seul paramètre, mais l'état du système (tache effectuée, tache en cours, tache à accomplir) est lui aussi pris en compte.

Je me lève, puis je me lave puis je m'habille.

L'outil qui décrit ces systèmes est le GRAFCET, mis au point entre 1975 et 1977 par un groupe d'universitaires et d'industriels français (au sein de l'AFCET : Association Française pour la Cybernétique Economique et Technique).

c. Système asservis.

La variable d'entrée est modifiée par la variable de sortie. Cette modification est graduelle, les grandeurs sont analogiques.

Je suis le groupe à 5m de distance.

L'un des premiers régulateurs est le régulateur à boules proposé en 1789 par l'ingénieur anglais James WATT qui permis d'adapter la vitesse de sortie de la machine aux variations de charge. Par contre la régulation implique des risques d'instabilité qui ont été étudié dès le 19^{ème} siècle par MAXWELL (1831-1879) ; ROUTH (1831-

1907) ; CAUCHY (1787-1857) ; STURM (1803-1855) ; HURWITZ (1859-1919).

A la fin du 19^{ème} siècle et au début du 20^{ème} siècle le développement des applications de l'électricité nécessite la mise au point de régulateurs simples de tension, courant, fréquence. Des régulateurs plus complexes sont aussi étudiés et notamment en 1911 Elmer SPERRY introduit le régulateur PID (Proportionnel, Intégral, Dérivé) ; type de régulateur encore utilisé de nos jours.

C'est à cette époque que les électroniciens sont confrontés aux problèmes de l'amplification, notamment pour la téléphonie à longue distance.

Vers 1930 les électroniciens Harold Stephen BLACK et Harry NYQUIST développent des amplificateurs à contre réaction où, au lieu d'utiliser des équations différentielles, ils mesurent expérimentalement la réponse en fréquence du système : c'est le début de l'analyse fréquentielle. A partir de 1940 Hendrik BODE contribue au développement de cette méthode en introduisant les notions de marge de gain et marge de phase (notions que nous utiliserons durant l'année scolaire prochaine....).

La seconde guerre mondiale a été l'occasion d'un rapprochement du point de vue des électroniciens (analyse fréquentielle) et du point de vue des mécaniciens (analyse temporelle par les équations différentielles). Ce rapprochement s'est fait lors de la conception, par les Américains, d'un système d'armes capables d'atteindre des avions en vol (ainsi que les V1 allemands).

Albert HALL a montré en 1943 que l'utilisation des transformées de LAPLACE (Pierre Simon de LAPLACE 1749-1827) permettaient d'aboutir aux fonctions de transfert faisant ainsi la jonction entre les équations différentielles des mécaniciens et l'analyse fréquentielle (ou harmonique) des électroniciens.

d. Système échantillonné ou numérique.

Les grandeurs de commande ou de sortie sont transformées en échantillons ou mots binaires, qui sont traités séquentiellement pour créer les lois de commande.

Nous n'aborderons en classes préparatoires que :

Les systèmes combinatoires et séquentiels en PTSI,
Certains systèmes asservis en PTSI et PT (1^{er} et 2nd ordre).

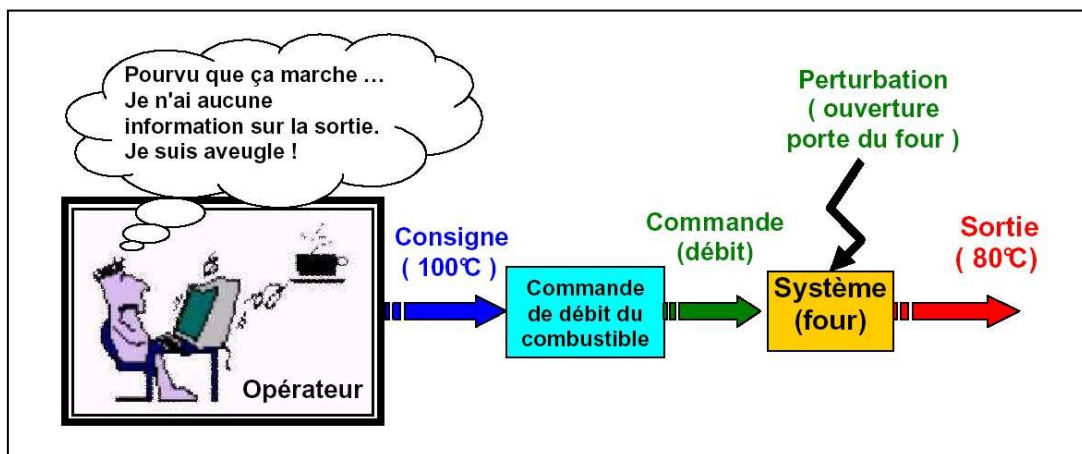
Les systèmes échantillonnés, et les autres systèmes asservis seront étudiés en cycle ingénieur.

2. Notion de bouclage (rétroaction).

Dans de nombreuses applications industrielles, il faut maintenir à des valeurs déterminées des grandeurs physiques (vitesse de rotation d'un moteur, température d'un four, ...) quelles que soient les perturbations (variation du couple résistant, ouverture de la porte du four, ...) qui peuvent influencer sur ces grandeurs. On est donc amené à concevoir des systèmes, où la grandeur de sortie s'aligne rigoureusement sur la grandeur souhaitée (entrée ou consigne), quel que soit l'environnement. On y parvient en appliquant une rétroaction de la sortie sur l'entrée. On réalise ainsi un système bouclé dit système asservi.

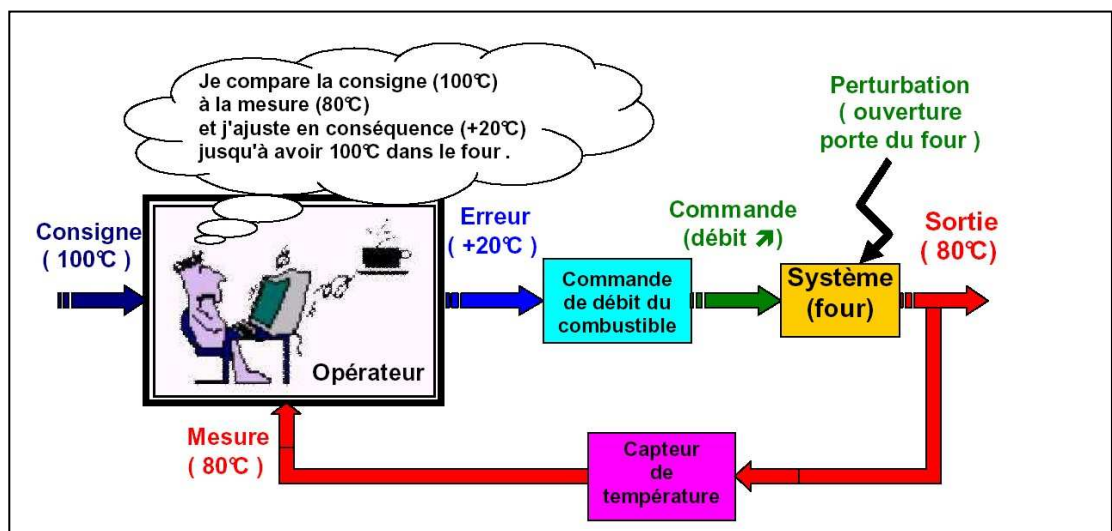
a. Exemple : Conduite d'un four.

L'opérateur doit garantir une température de 100°C à l'intérieur d'un four. Si ce système ne renvoi pas une image de la température à l'intérieur de l'enceinte, il est impossible de la certifier :



Ce type de système, dit en boucle ouverte, ne permet pas de faire évoluer l'entrée (consigne ou état souhaité) en fonction de la sortie du système (état réel).

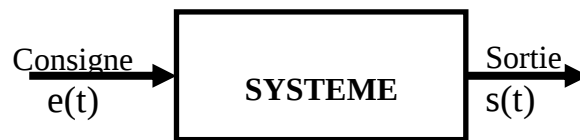
La prise de température à l'intérieur de l'enceinte, et son action sur l'entrée rend ce système asservi, et permet de garantir le résultat.



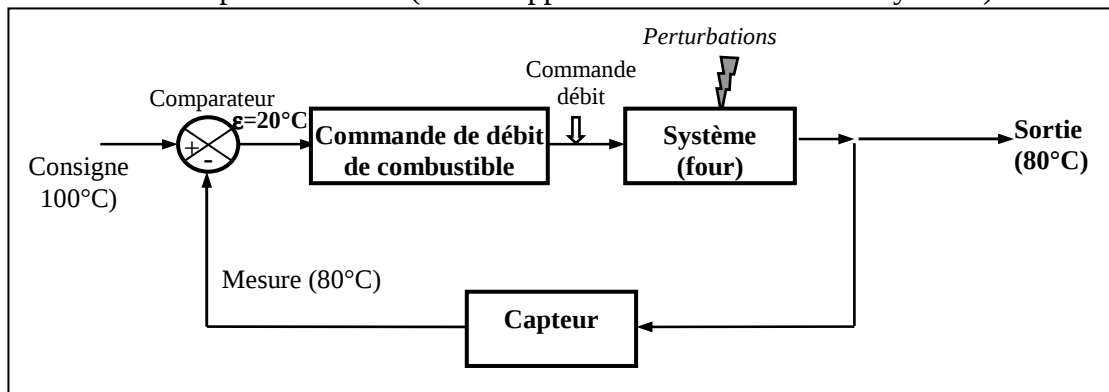
Un bouclage apparaît donc chaque fois qu'au cours d'une opération, un système prend en compte l'observation de son état pour le modifier

b. Modèle :

Le schéma précédent peut être représenté par le schéma suivant :

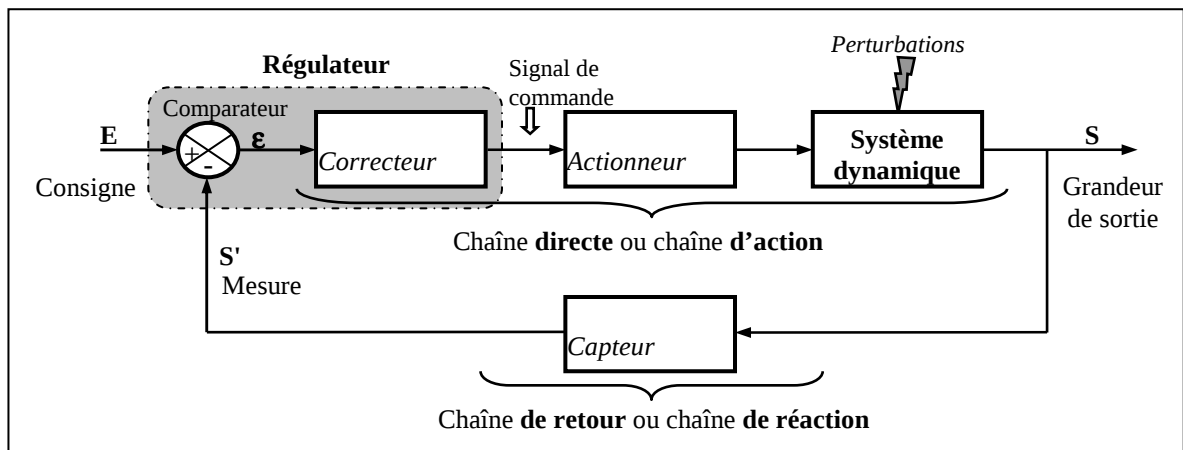


Ce modèle schéma bloc permet de relier une entrée à une sortie, en observant le système globalement. Dans notre cas, nous pouvons dessiner un autre schéma plus structuré (faisant apparaître la constitution du système).



c. Structure générale d'un système asservi.

Un système asservi peut être modélisé par le schéma fonctionnel appelé schéma bloc suivant :



Il est caractérisé par deux chaînes :

- Une chaîne directe ou d'action assurant les fonctions de commande et de puissance
- Une chaîne de retour ou de réaction assurant la fonction de mesure.

Le régulateur élabore le signal de commande à partir de l'écart ϵ (ou erreur) constaté entre la consigne et la mesure issue du capteur. Il comporte :

- Un comparateur élaborant le signal d'erreur ϵ .
- Un préamplificateur (non représenté) adaptant le niveau de ce signal ;
- Un correcteur modifiant l'allure de la commande pour améliorer les performances du système.

L'actionneur fournit la puissance au processus à partir du signal élaboré par le régulateur.

Le système dynamique (ou processus) évolue selon les lois physiques le caractérisant, afin d'apporter la valeur ajoutée à la matière d'œuvre. Cependant, il peut subir des perturbations extérieures prévisibles ou non.

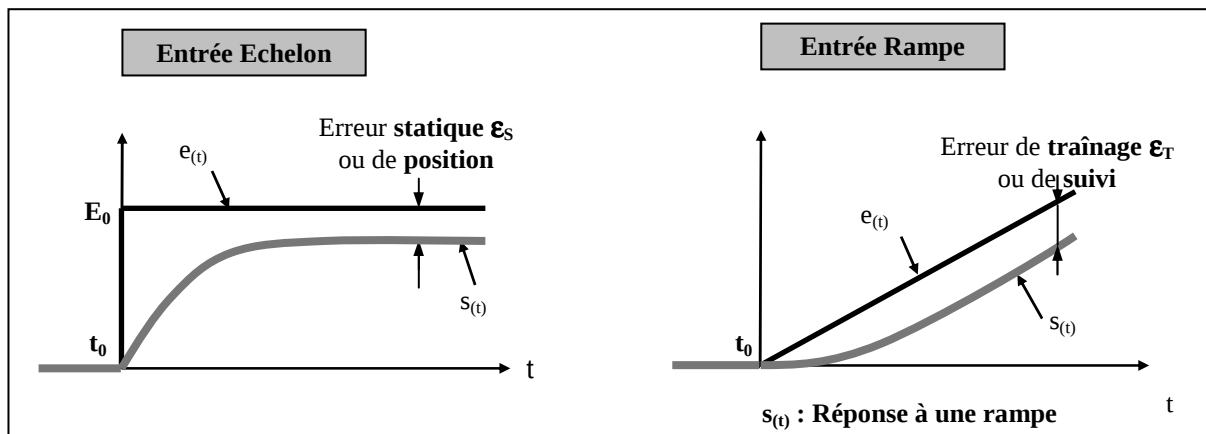
3. Qualités des systèmes asservis.

Le cahier des charges d'un système asservi impose un certain nombre de performances portant sur les comportements en régime établi (**précision**) et en régime transitoire (**rapidité** et **stabilité**).

Ces trois caractéristiques sont étroitement **liées**. Il faut donc les rendre compatibles, ce qui passe souvent par la recherche d'un **correcteur approprié**, car les exigences de précision et de stabilité imposent généralement des réglages contradictoires.

a. Précision.

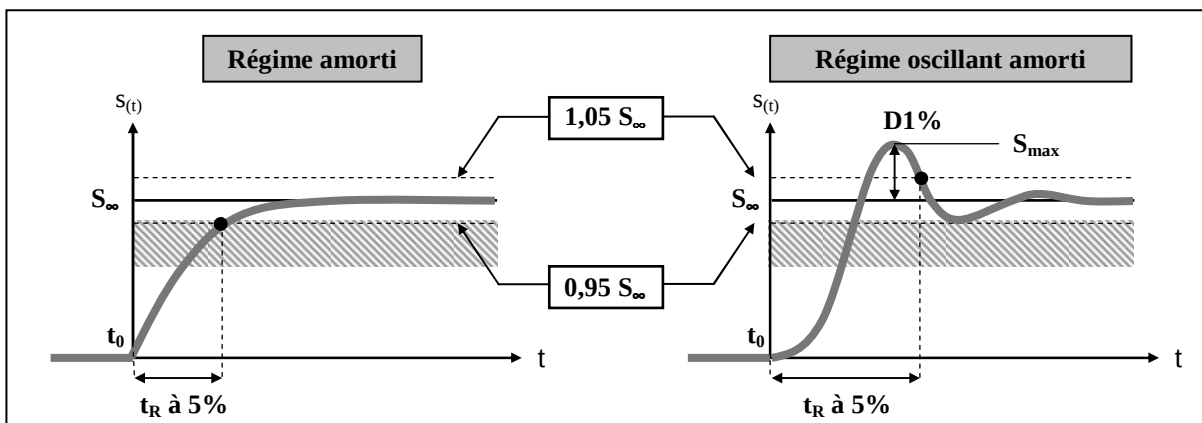
Sous l'action d'un des signaux d'entrée types $e(t)$ ci-dessous, un système linéaire tend à présenter en sortie un signal $s(t)$ du même type. Si, en régime établi (au bout d'un certain temps), il existe une différence entre la sortie et l'entrée, alors il y a une **erreur permanente**.



b. Rapidité.

La rapidité, c'est le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (échelon). La valeur finale S_∞ de $s(t)$ étant souvent atteinte de manière asymptotique, la rapidité est généralement caractérisée par le **temps de réponse t_R à 5%**. C'est le temps mis par la réponse $s(t)$ pour que :

$$t \geq t_{R(5\%)} \Rightarrow 0,95 \cdot S_\infty \leq s(t) \leq 1,05 \cdot S_\infty$$

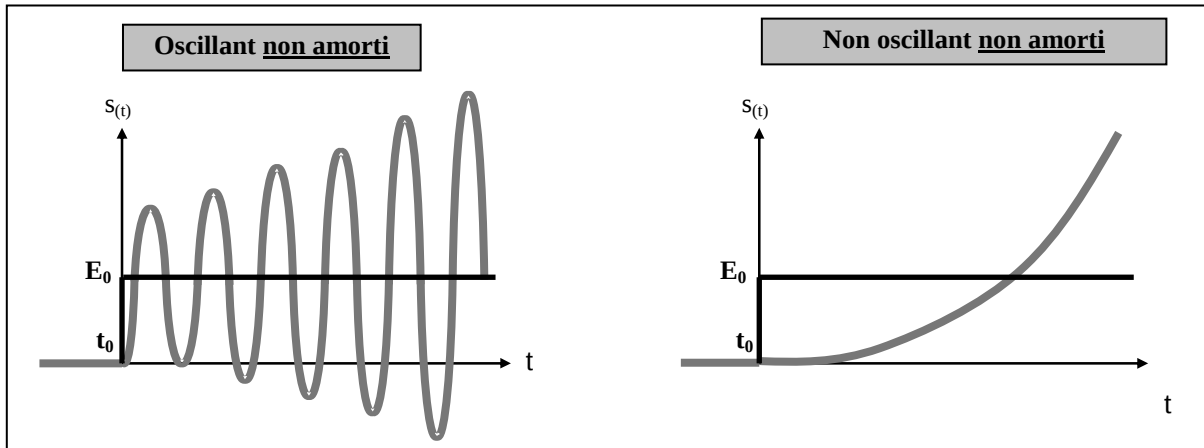


Dans le cas du régime oscillant amorti, on complète le temps de réponse par le premier dépassement exprimé en %, qui caractérise l'amplitude des oscillations :

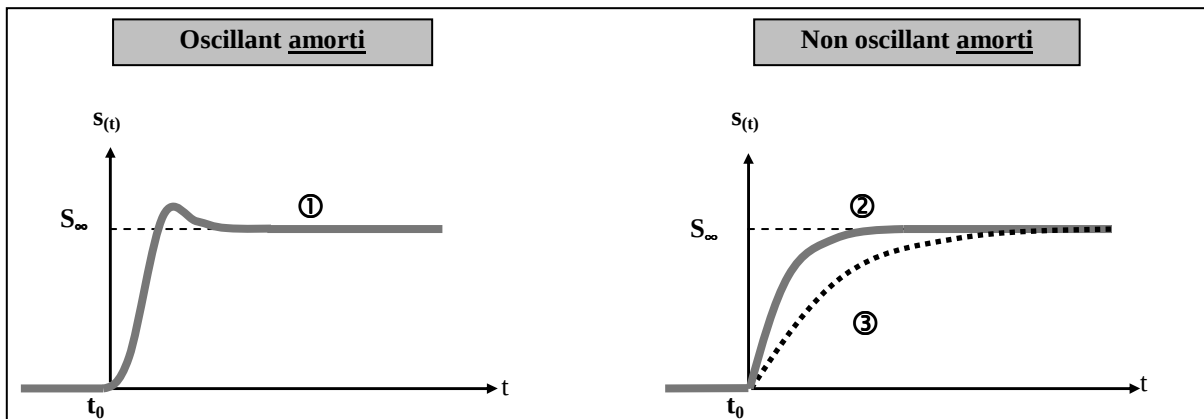
$$D1\% = 100 \cdot \left| \frac{S_{\max} - S_{\infty}}{S_{\infty}} \right|$$

c. Stabilité.

Pour la grande majorité des systèmes, on ne peut pas accepter, qu'à consigne constante, la grandeur de sortie ne converge pas vers une valeur constante comme ci-dessous :



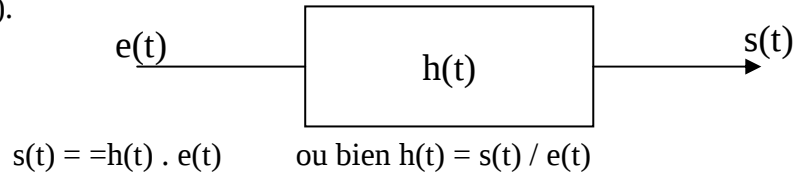
Le comportement que l'on souhaite normalement obtenir est semblable à ceux proposés ci-dessous :



Si l'amortissement est trop important (courbe ③), cela conduit à une perte significative de rapidité pour le système. La réponse ① propose un bon compromis entre **amortissement** et **rapidité** pour un système oscillant. On lui préférera la réponse ② dans les applications où l'amplitude des oscillations doit impérativement rester nulle.

4. Fonction de transfert temporelle.

Un système peut être modélisé par un schéma bloc où $e(t)$ et $s(t)$ sont des fonctions temporelles reliées par $h(t)$ appelée fonction de transfert ou transmittance en t (t pour temps).



Les variables $e(t)$ et $s(t)$ étant des variables temporelles, on appelle les systèmes ainsi décrits « systèmes dynamiques ».

$e(t)$ et $s(t)$ sont des variables régies par des équations différentielles.

$$e(t) = E_n \frac{d^n}{dt^n} e(t) + E_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} e(t) + E_{n-2} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} e(t) + E_{n-3} \frac{d^{n-3}}{dt^{n-3}} e(t) + \dots + E_0 e(t).$$

$$s(t) = S_m \frac{d^m}{dt^m} s(t) + S_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} s(t) + S_{m-2} \frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}} s(t) + S_{m-3} \frac{d^{m-3}}{dt^{m-3}} s(t) + \dots + S_0 s(t).$$

$$h(t) = \frac{S_m \frac{d^m}{dt^m} s(t) + S_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} s(t) + S_{m-2} \frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}} s(t) + S_{m-3} \frac{d^{m-3}}{dt^{m-3}} s(t) + \dots + S_0 s(t)}{E_n \frac{d^n}{dt^n} e(t) + E_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} e(t) + E_{n-2} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} e(t) + E_{n-3} \frac{d^{n-3}}{dt^{n-3}} e(t) + \dots + E_0 e(t)}$$

Toute la problématique de l'étude des systèmes asservis tient en la difficulté d'étude des équations différentielles.

5. Systèmes linéaires, continus et invariants.

a. Système linéaire

Un système est linéaire si ses équations de représentation sont à coefficients constants : $\forall (t, n, m), E_n = Cte, S_m = Cte$

Cette hypothèse engendre une condition de linéarité forte : il n'existe aucun phénomène de saturation.

b. Système continu

Un système est continu si l'évolution des variables temporelles utilisées se représente par des fonctions continues du temps.

Remarque : Les systèmes échantillonnés ne sont pas continus, car les variables ne sont connues qu'aux dates d'échantillonnage.

c. Système invariant

Un système est invariant si ses propriétés et caractéristiques sont indépendantes du temps. La même expérience réalisée à deux dates différentes donne les mêmes résultats. Par cette hypothèse, l'usure aléatoire des systèmes ne peut être prise en compte.

Dans ce cours, nous n'étudierons que des systèmes linéaires continus et invariants.

6. Systèmes du 1^{er} et 2nd ordre : équations caractéristiques.

Le cours de PTSI et PT se limite à l'étude des systèmes du 1^{er} et 2nd ordre. Les équations régissant ces systèmes sont donc des équations du 1^{er} ou 2nd ordre ayant les formes suivantes :

a. Système du 1^{er} ordre :

$$S_0.s(t) + S_1.\frac{d(s(t))}{dt} = E_0.e(t)$$

ou bien

$$S_0.s(t) + S_1.\frac{d(s(t))}{dt} = E_0.e(t) + E_1.\frac{d(e(t))}{dt} : \text{équation généralisée d'un système du 1^{er} ordre.}$$

b. Système du 2nd ordre :

$$S_0.s(t) + S_1.\frac{d(s(t))}{dt} + S_2.\frac{d^2(s(t))}{dt^2} = E_0.e(t)$$

ou bien

$$S_0.s(t) + S_1.\frac{d(s(t))}{dt} + S_2.\frac{d^2(s(t))}{dt^2} = E_0.e(t) + E_1.\frac{d(e(t))}{dt} + E_2.\frac{d^2(e(t))}{dt^2} : \text{équation généralisée d'un système du 2nd ordre}$$

c. Remarque :

On appelle généralisées, les équations pour lesquelles apparaissent les dérivées de l'entrée.

Ce type de fonction permet l'étude des perturbations sur un système bouclé.

7. Construction du modèle.

a. Modèle de connaissance :

Le modèle de connaissance est le modèle théorique élaboré lors de la conception du système automatique. Ce modèle est élaboré à partir des lois de la physique appliquées aux constituants mis en œuvres. C'est ce type de modèle qui sera étudié en PTSI et PT.

b. Modèle de comportement :

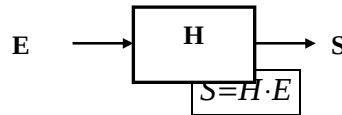
Le modèle de comportement d'un système est élaboré par expérimentation. Le système modélisé est réel, et est soumis à des sollicitations type, parfaitement connues. Les réaction du système à ces sollicitations permet de donner un modèle théorique comparable. Ce domaine de l'automatique s'appelle l'identification, et sera abordé en cycle ingénieur.

Chapitre 2 : Algèbre des schémas blocs.

1. Schémas blocs : éléments constitutifs.

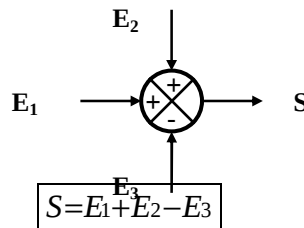
Pour représenter graphiquement la structure d'un système asservi, on utilise donc un schéma bloc. Cette technique de représentation utilise trois éléments de base :

a. Le bloc :



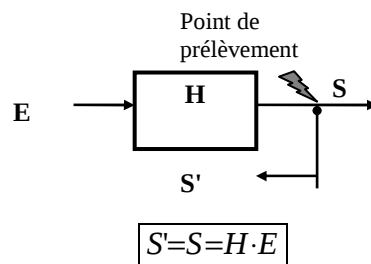
Il représente une fonction de transfert ou transmittance. Il a une entrée et une sortie. Les flèches sont orientées de l'entrée vers la sortie.

b. Le sommateur :



Il peut avoir plusieurs entrées mais une seule sortie. Les signes + ou - associés aux branches entrantes précisent si l'entrée s'additionne ou se soustrait.

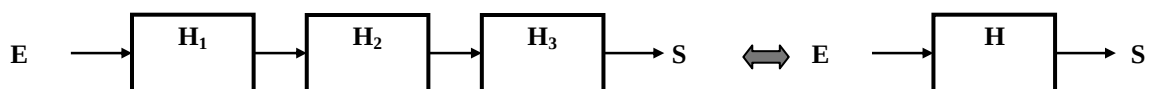
c. La jonction :



Une **branche de prélèvement** prend le même signal que la branche principale sans l'affecter (pas d'atténuation).

2. Algèbre des schémas blocs.

a. Blocs en série :

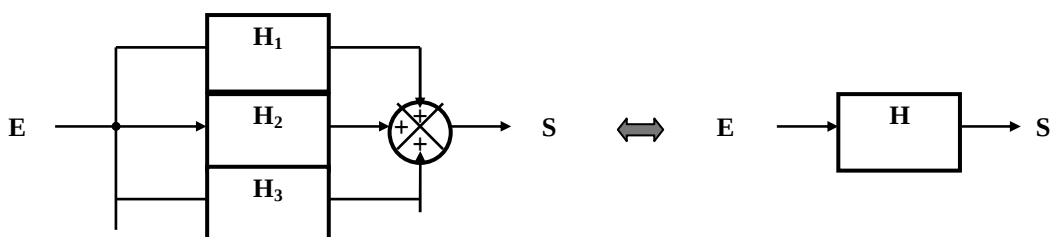


La fonction de transfert de l'ensemble est égale au produit des fonctions de transfert de chaque bloc.

$$H = H_1 \cdot H_2 \cdot H_3$$

b. Blocs en

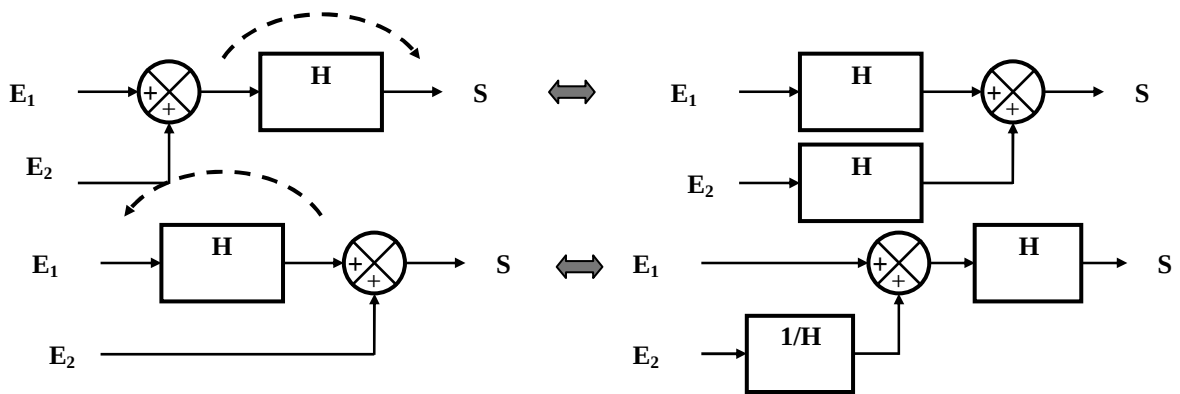
parallèle :



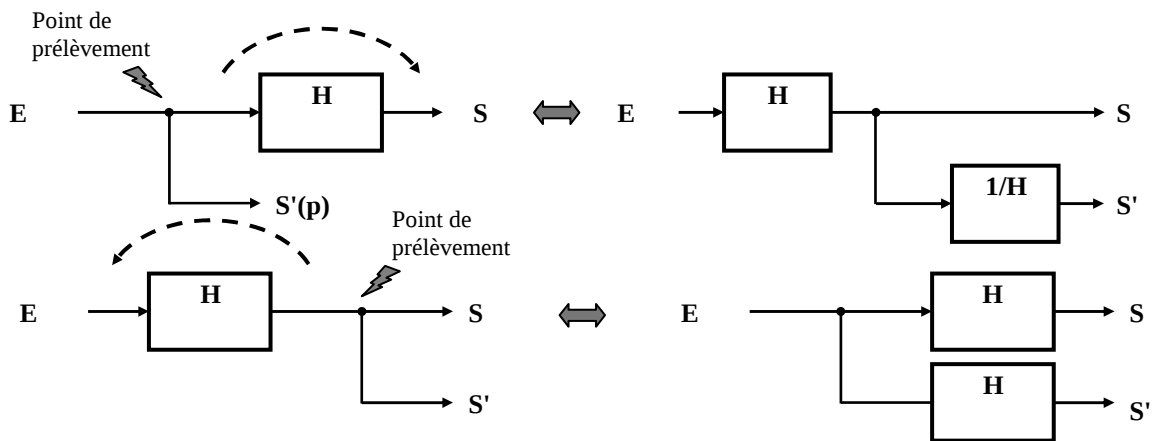
La fonction de transfert de l'ensemble est égale à la somme des fonctions de transfert de chaque bloc.

$$H = H_1 + H_2 + H_3$$

c. Déplacement des sommateurs :

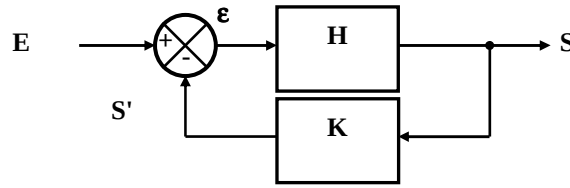


d. Déplacement des points de prélèvement :



3. Calcul des fonctions de transfert des systèmes bouclés.

Soit un système représenté par le schéma bloc ci-dessous :



a. Définitions :

- E, signal d'entrée du système est appelé : « consigne ».
- ϵ , différence entre la consigne et le signal de retour est appelé : « écart ».
- H est appelé : « chaîne directe »
- K est appelé : « chaîne de retour »
- Lorsque $K=1$, on parle de système à retour unitaire

b. Fonction de transfert en boucle fermée (H_{BF})

La fonction de transfert en boucle fermée (notée FTBF) est la transmittance reliant S à E.

$$H_{BF} = \frac{S}{E}$$

On a : $S = H\epsilon = H \cdot (E - S')$

Or : $S' = K \cdot S$

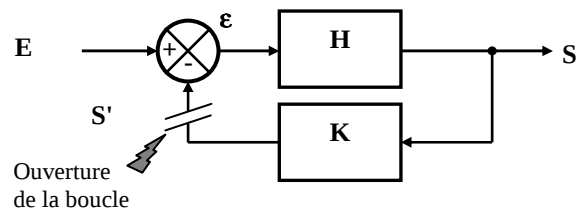
d'où $S(1 + K \cdot H) = H \cdot E \Rightarrow \boxed{H_{BF} = \frac{H}{1 + K \cdot H}}$

c. Fonction de transfert en boucle ouverte (H_{BO}).

On définit la fonction de transfert en boucle ouverte (notée FTBO) comme étant le rapport entre l'image de la sortie (S') et l'écart ϵ .

Pour la calculer (ou la mesurer), on ouvre la boucle de retour à l'entrée du sommateur.

$$\boxed{H_{BO} = \frac{S'}{\epsilon} = K \cdot H}$$



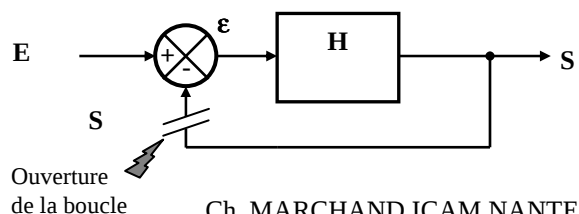
d. Relation entre FTBF et FTBO.

On remarque que la FTBO est le produit de la chaîne directe et de la chaîne de retour.

On peut donc écrire :

$$\boxed{H_{BF} = \frac{H}{1 + H_{BO}}}$$

e. Cas du retour unitaire.

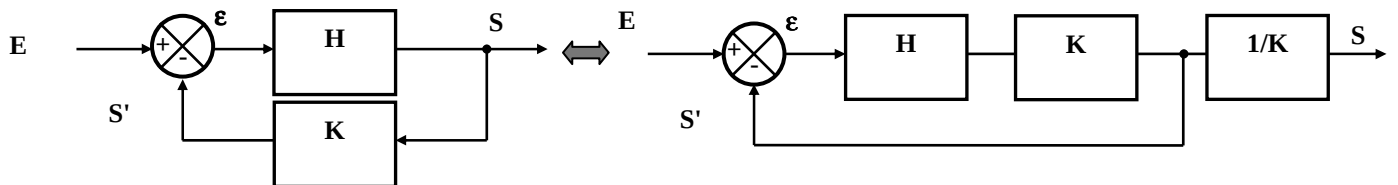


Dans le cas d'un retour unitaire, la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) est la chaîne directe.

Dans ce cas, on peut écrire : $H_{BF} = \frac{H_{BO}}{1 + H_{BO}}$

f. Transformation en système à retour unitaire.

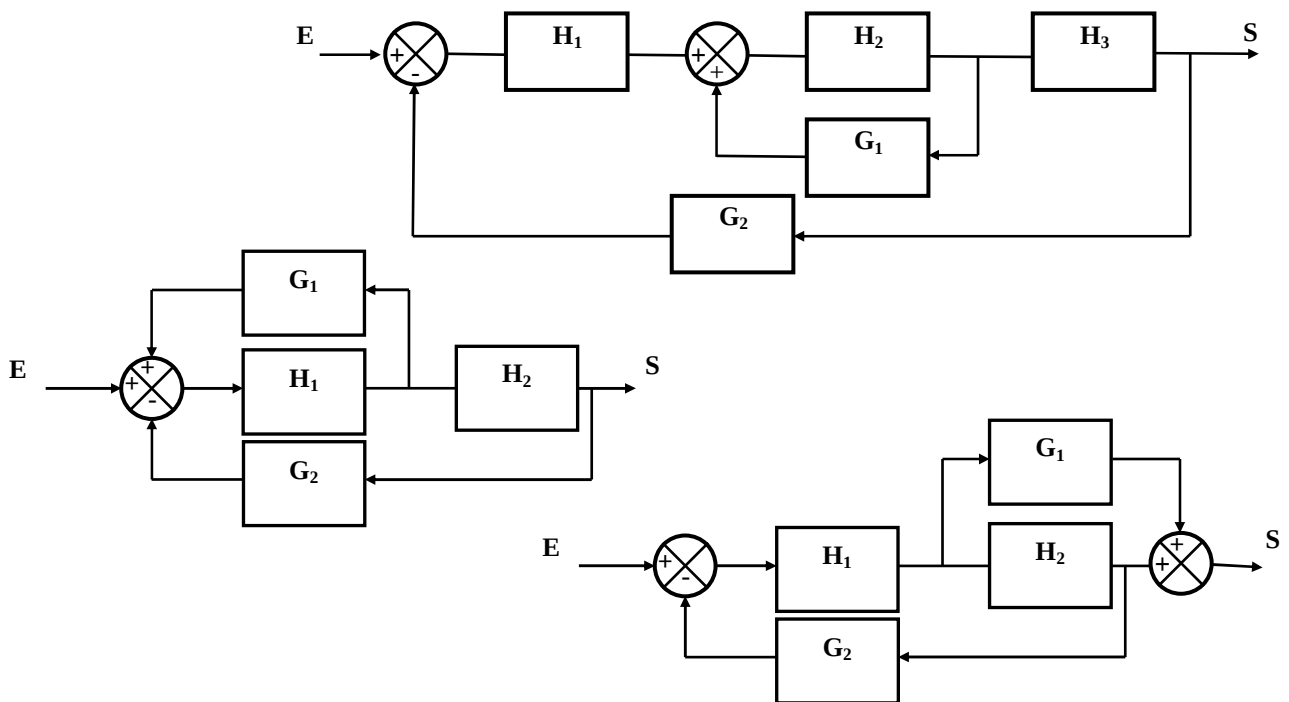
Un système avec une chaîne de retour non unitaire peut être transformé en système à retour unitaire :



On remarque que la sortie du système reste inchangée.

4. Exemples.

a. Calculer la fonction de transfert équivalente aux montages suivants :



b. Mettre les deux premiers montages sous forme de systèmes à retour unitaire.

Chapitre 3 :

Transformée de LAPLACE

Approche de l'automaticien.

Ce chapitre n'a pour objet que de mettre en place les connaissances nécessaires à l'étude des systèmes asservis en CPGE. La transformée de LAPLACE sera étudiée, d'un point de vue mathématique (démonstration des théorèmes) en classe de PT.

1. Définition.

A toute fonction $f(t)$, définie pour $t > 0$, on fait correspondre une fonction $F(p)$ de la variable complexe $p = a + j.b$, que l'on appelle transformée de LAPLACE de $f(t)$ définie par :

$$F(p) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f(t) \cdot dt$$

Remarque :

- Pour que $F(p)$ existe, il faut que :
 - $f(t)$ soit intégrale
 - $e^{-pt} \cdot f(t)$ converge quant t tend vers ∞
- La transformée de Laplace ne s'applique qu'aux fonctions causales (telles que $f(t)=0$ pour $t < 0$).
- Dans la littérature américaine, la variable p est notée s .
- On note $F(p) = L(f(t))$ et $f(t) = L^{-1}(F(p))$

2. Propriétés.

a. Unicité.

A $f(t)$ correspond une et une seule transformée $F(p)$, et réciproquement.

b. Linéarité.

Soient $f(t)$ et $g(t)$, deux fonctions dont les transformées $F(p)$ et $G(p)$ existent.

$$L(\lambda \cdot f(t) + \mu \cdot g(t)) = \lambda \cdot L(f(t)) + \mu \cdot L(g(t)) = \lambda \cdot F(p) + \mu \cdot G(p)$$

La transformée inverse est elle aussi linéaire, ainsi :

$$L^{-1}(\lambda \cdot F(p) + \mu \cdot G(p)) = \lambda \cdot L^{-1}(F(p)) + \mu \cdot L^{-1}(G(p)) = \lambda \cdot f(t) + \mu \cdot g(t)$$

3. Calcul de la transformée de la dérivée d'une fonction.

a. Transformée de la dérivée première.

Par définition,

$$L\left(\frac{d(y(t))}{dt}\right) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot \frac{d(y(t))}{dt} \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot d(y(t))$$

On pose : $u = e^{-pt}$ et $dv = dy(t)$, puis, on intègre par partie: $\int u \cdot dv = [u \cdot v] - \int v \cdot du$

$$L\left(\frac{d(y(t))}{dt}\right) = \left[e^{-pt} \cdot y(t) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} y(t) \cdot (-p \cdot e^{-pt} \cdot dt)$$

$$L\left(\frac{d(y(t))}{dt}\right) = [0 - y(0)] + p \cdot \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot y(t) \cdot dt$$

$$L\left(\frac{d(y(t))}{dt}\right) = p \cdot Y(p) - y(0)$$

Si les conditions initiales sont nulles, $y(0) = 0$, alors

$$L\left(\frac{d(y(t))}{dt}\right) = p \cdot Y(p)$$

b. Transformée de la dérivée seconde.

$$L\left(\frac{d(y(t))}{dt}\right) = p \cdot Y(p) - y(0), \text{ donc } L\left(\frac{d^2(y(t))}{dt^2}\right) = p \cdot L\left(\frac{d(y(t))}{dt}\right) - \dot{y}(0)$$

$$L\left(\frac{d^2(y(t))}{dt^2}\right) = p[p \cdot L(y(t)) - y(0)] - \dot{y}(0)$$

$$L\left(\frac{d^2(y(t))}{dt^2}\right) = p^2 \cdot L(y(t)) - p \cdot y(0) - \dot{y}(0)$$

Si les conditions initiales sont nulles,

$$L\left(\frac{d^2(y(t))}{dt^2}\right) = p^2 \cdot Y(p)$$

c. Transformée de la dérivée n^{ème}

En procédant par itération, on montre, pour des conditions initiales nulles,

$$L\left(\frac{d^n(y(t))}{dt^n}\right) = p^n \cdot Y(p)$$

d. Equations temporelles.

différentielles

Soit

$$s(t) = E_0 \cdot e(t) + E_1 \cdot \frac{d(e(t))}{dt} + E_2 \cdot \frac{d^2(e(t))}{dt^2}$$

L'application des résultats précédents permet d'écrire, dans le domaine de Laplace, si les conditions initiales sont nulles :

$$S(p) = E_0 \cdot E(p) + E_1 \cdot p \cdot E(p) + E_2 \cdot p^2 \cdot E(p)$$

On peut donc constater qu'une équation différentielle dans le domaine temporelle se transforme en polynôme en p dans le domaine de Laplace si les conditions initiales sont nulles.

4. Théorèmes généraux.

a. Théorème du retard.

Soit une fonction $f(t)$, de transformée $F(p)$.
Soit une fonction $g(t)$ telle que $g(t) = f(t-T)$.

$g(t)$ est la fonction $f(t)$ retardée d'un temps T

$$L(g(t)) = L(f(t-T)) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f(t-T) \cdot dt$$

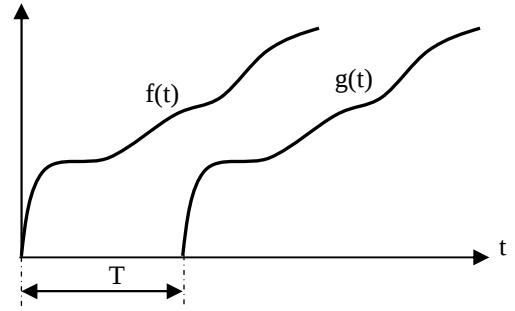
Soit $t-T=u \Rightarrow du=dt$ et $t=u+T$

On peut donc écrire :

$$L(g(t)) = \int_0^{\infty} e^{-p(u+T)} \cdot f(u) \cdot du = e^{-pT} \int_0^{\infty} e^{-pu} \cdot f(u) \cdot du$$

d'où :

$$L(f(t-T)) = L(g(t)) = e^{-pT} \cdot F(p)$$



b. Théorème de la valeur finale.

Soit une fonction $f(t)$, de transformée $F(p)$.

On montre que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot F(p))$$

Ce théorème permet de trouver la valeur finale d'un signal temporel en ne connaissant que sa transformée de Laplace.

c. Théorème de la valeur initiale.

Soit une fonction $f(t)$, de transformée $F(p)$.

On montre que

$$\lim_{t \rightarrow 0} (f(t)) = \lim_{p \rightarrow \infty} (p \cdot F(p))$$

Ce théorème permet de trouver la valeur initiale d'un signal temporel en ne connaissant que sa transformée de Laplace.

Ces deux précédents théorèmes permettent d'envisager que pour obtenir un certain nombre d'information sur un système étudié dans le domaine de Laplace, il ne sera pas nécessaire de retourner dans le domaine temporel.

5. Transformées des signaux usuels.

Trois signaux usuels sont utilisés comme entrées types des systèmes à étudier pour observer leurs comportements. Ces signaux sont :

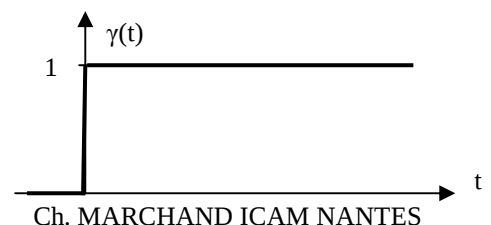
- L'impulsion
- L'échelon
- La rampe

a. Echelon unitaire (échelon d'Heaviside).

L'échelon d'Heaviside ($\gamma(t)$) est aussi appelée fonction existence.

Elle se définit ainsi :

- $\gamma(t) = 1$ pour $t \geq 0$
- $\gamma(t) = 0$ pour $t < 0$



On remarque que toute fonction non nulle pour $t < 0$ devient causale lorsqu'elle est multipliée par $\gamma(t)$.

$$L(\gamma(t)) = \Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \gamma(t) \cdot dt$$

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{\infty} = \left[\frac{0-1}{-p} \right] = \frac{1}{p}$$

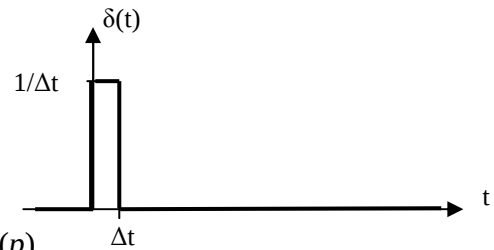
$$\boxed{\Gamma(p) = \frac{1}{p}}$$

Remarque :

Si l'échelon n'est pas unitaire, mais d'amplitude a , sa transformée est $\frac{a}{p}$

b. Impulsion de Dirac.

L'impulsion de Dirac ($\delta(t)$) est un signal d'amplitude infinie, et de surface unitaire. On la représente ainsi :



On peut remarquer que $\frac{d(\gamma(t))}{dt} = \delta(t)$

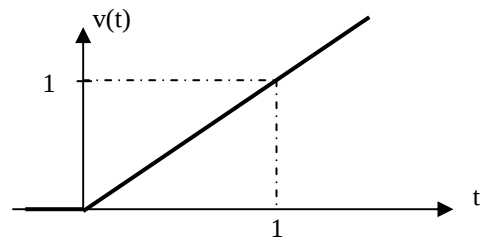
Ce qui permet d'écrire que $L(\delta(t)) = \Delta(p) = p\Gamma(p)$

Or, $\Gamma(p) = \frac{1}{p}$ d'où :

$$\boxed{\Delta(p) = 1}$$

c. Rampe (commande en vitesse).

La fonction rampe ($v(t)$) est définie par $v(t) = 1 \cdot t$ dans le cas d'une rampe unitaire.



On peut remarquer que $\frac{d(v(t))}{dt} = \gamma(t)$

Ce qui permet d'écrire que $L(v(t)) = V(p) = \frac{\Gamma(p)}{p}$

Or, $\Gamma(p) = \frac{1}{p}$ d'où :

$$\boxed{V(p) = \frac{1}{p^2}}$$

Remarque : Si la rampe n'est pas unitaire, mais telle que $v(t) = a \cdot t$, sa transformée est $\frac{a}{p^2}$

6. Exemples de calculs de transformées de fonctions.

a. Transformée de l'exponentielle e^{-at} , avec $a > 0$

$$L(e^{-at}) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot e^{-at} \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+a)t} \cdot dt$$

$$L(e^{-at}) = \frac{-1}{p+a} \left[e^{-(p+a)t} \right]_0^{\infty} = \frac{-1}{p+a} [0-1]$$

$$\boxed{L(e^{-at}) = \frac{1}{p+a}}$$

b. Transformée des fonctions sinus et cosinus

$$\text{Soient : } M = L(\cos(\omega t)) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos(\omega t) \cdot dt$$

$$N = L(\sin(\omega t)) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin(\omega t) \cdot dt$$

$$\text{Calculons : } M + j \cdot N = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos(\omega t) \cdot dt + j \cdot \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin(\omega t) \cdot dt$$

$$M + j \cdot N = \int_0^{\infty} e^{-pt} (\cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)) \cdot dt$$

$$\text{or, } (\cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)) = e^{j\omega t} \text{ (Formule de Moivre)}$$

$$M + j \cdot N = \int_0^{\infty} e^{(-p+j\omega)t} \cdot dt = \frac{1}{-p+j\omega} \left[e^{(-p+j\omega)t} \right]_0^{\infty}$$

$$M + j \cdot N = \frac{1}{-p+j\omega} [0-1] = \frac{1}{p-j\omega} = \frac{p+j\omega}{p^2+\omega^2}$$

Par identification on peut écrire :

$$\begin{aligned} L(\cos(\omega t)) &= \frac{p}{p^2+\omega^2} \\ L(\sin(\omega t)) &= \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \end{aligned}$$

7. Fonctions de transfert dans le domaine de Laplace.

En appliquant la transformée de Laplace aux équations différentielles régissant les systèmes automatiques, on obtient de nouvelles équations en p permettant d'écrire les fonctions de transfert dans le domaine de Laplace, appelées transmittance en p.

a. Système du 1^{er} ordre.

Un système du premier ordre est représenté par une équation différentielle du premier ordre du type :

$$S_0 \cdot s(t) + S_1 \cdot \frac{d(s(t))}{dt} = E_0 \cdot e(t)$$

Cette équation devient dans le domaine de Laplace :

$$S_0 \cdot S(p) + S_1 \cdot p \cdot S(p) = E_0 \cdot E(p)$$

On en tire la fonction de transfert

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{E_0}{S_0 + S_1 \cdot p}$$

b. Système du 2nd ordre.

Un système du second ordre est représenté par une équation différentielle du second ordre du type :

$$S_0.s(t) + S_1.\frac{d(s(t))}{dt} + S_2.\frac{d^2(s(t))}{dt^2} = E_0.e(t)$$

Cette équation devient dans le domaine de Laplace :

$$S_0.S(p) + S_1.p.S(p) + S_2.p^2.S(p) = E_0.E(p)$$

On en tire la fonction de transfert

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{E_0}{S_0 + S_1 \cdot p + S_2 \cdot p^2}$$

Chapitre 4 : Système du 1^{er} ordre.

1. Définition, équations du système.

Un système du 1^{er} ordre est un système dont l'équation caractéristique est de la forme :

$$S_0 \cdot s(t) + S_1 \cdot \frac{d(s(t))}{dt} = E_0 \cdot e(t) \quad \text{ou bien,} \quad S_0 \cdot s(t) + S_1 \cdot \frac{d(s(t))}{dt} = E_0 \cdot e(t) + E_1 \cdot \frac{d(e(t))}{dt} \quad \text{dans le cas d'un système du 1^{er} ordre généralisé.}$$

Dans cette étude théorique, nous ne traiterons que les systèmes de la première forme.

a. Transmittance en p.

La transformée de Laplace de l'équation caractéristique permet d'écrire :

$$S_0 \cdot S(p) + S_1 \cdot p \cdot S(p) = E_0 \cdot E(p) \Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{E_0}{S_0 + S_1 \cdot p} = \frac{\frac{E_0}{S_0}}{1 + p \cdot \frac{S_1}{S_0}}$$

$$\text{On écrit : } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \quad \text{avec :}$$

- $K = \frac{E_0}{S_0}$ Gain statique du système
- $\tau = \frac{S_1}{S_0}$ constante de temps du système.
- $H(p)$: transmittance en p du système, ou fonction de transfert.

b. Exemple :

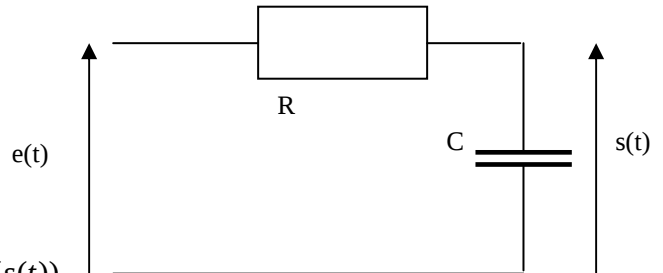
Soit le circuit RC du schéma ci-contre.

On peut écrire :

$$Q = C \cdot s(t)$$

$$dQ = i(t) = C \cdot \frac{d(s(t))}{dt}$$

$$e(t) = s(t) + R \cdot i(t) = s(t) + RC \cdot \frac{d(s(t))}{dt}$$



$$\Rightarrow E(p) = S(p)(1 + RCp) \quad \text{d'où} \quad H(p) = \frac{1}{1 + RCp}$$

- o $K = 1$
- o $\tau = RC$

2. Réponses temporelles d'un système du 1^{er} ordre.

Dans ce paragraphe, nous allons étudier les réponses d'un système du 1^{er} ordre aux sollicitations types.

a. Réponse impulsionnelle.

La réponse impulsionnelle est la réponse d'un système à une impulsion de Dirac.

$$e(t) = \delta(t) \Rightarrow E(p) = \Delta(p) = 1$$

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \Rightarrow S(p) = E(p) \cdot H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \text{ d'où}$$

$$s(t) = \frac{K}{\tau} (e^{-t/\tau})$$

Tracé de la réponse :

- Tangente à l'origine :

$$\frac{d(s(t))}{dt} = -\frac{K}{\tau^2} e^{-t/\tau}$$

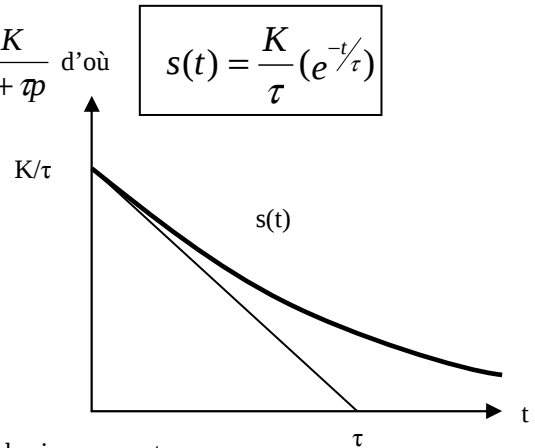
$$s'(0) = -\frac{K}{\tau^2} \text{ et } s(0) = \frac{K}{\tau}$$

- Equation de la tangente à l'origine :

$$-\frac{K}{\tau^2} t + \frac{K}{\tau} = \frac{K}{\tau} (1 - \frac{t}{\tau}) : \text{coupe l'axe des abscisses pour } t = \tau$$

- Valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (s(t)) = 0$$



b. Réponse indicielle.

La réponse indicielle est la réponse d'un système à un échelon d'Heaviside.

$$e(t) = \gamma(t) \Rightarrow E(p) = \Gamma(p) = \frac{1}{p}$$

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \Rightarrow S(p) = E(p) \cdot H(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)}$$

Pour retrouver l'équation temporelle de la réponse indicielle, on décompose S(p) en éléments simples.

$$\text{On pose : } S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1 + \tau p} \text{ d'où } S(p) = \frac{A(1 + \tau p) + Bp}{p(1 + \tau p)} = \frac{A + p(A\tau + B)}{p(1 + \tau p)}$$

Par identification, $A = K$ et $B = -K\tau$

$$\text{Donc, } S(p) = K \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1 + \tau p} \right) = K \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{\tau} + p} \right)$$

D'où

$$s(t) = K(1 - e^{-t/\tau})$$

Tracé de la réponse :

- Tangente à l'origine :

$$\frac{d(s(t))}{dt} = \frac{K}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} \text{ pour } t=0, s'(0) = \frac{K}{\tau}$$

La tangente à l'origine coupe l'asymptote $s(t)=K$ pour $t=\tau$

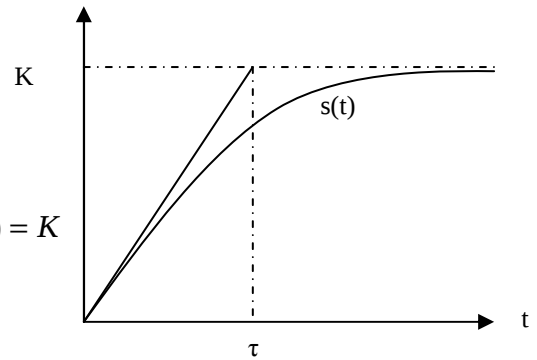
C'est une méthode graphique pour trouver la constante de temps d'un système du 1^{er} ordre après un essai avec une entrée en échelon.

- Valeurs particulières :
 pour $t=\tau$, $s(t) = 0,63 K$
 pour $t=3\tau$, $s(t) = 0,95 K$
- Temps nécessaire pour que $s(t)$ atteigne 99% de l'entrée :
 $0,99K = K(1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow e^{-t/\tau} = 0,01$

D'où $t = 4,6\tau$

- Valeur finale :

$$s(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} (p(S(p))) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{K}{p(1 + \tau p)} \right) = K$$



c. Réponse en vitesse.

La réponse en vitesse est la réponse d'un système à une rampe $v(t)$.

$$e(t) = E_0 v(t) \Rightarrow E(p) = E_0 V(p) = \frac{E_0}{p^2}$$

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \Rightarrow S(p) = E(p) \cdot H(p) = \frac{KE_0}{p^2(1 + \tau p)}$$

Pour retrouver l'équation temporelle de la réponse indicielle, on décompose $S(p)$ en éléments simples.

$$\text{On pose : } S(p) = KE_0 \left(\frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{1 + \tau p} \right) \text{ d'où}$$

$$S(p) = KE_0 \left(\frac{A(1 + \tau p) + Bp(1 + \tau p) + Cp^2}{p^2(1 + \tau p)} \right) = KE_0 \left(\frac{A + p(A\tau + B) + p^2(B\tau + C)}{p^2(1 + \tau p)} \right)$$

Par identification, $A = 1$, $B = -\tau$, et $C = \tau^2$

$$\text{Donc, } S(p) = KE_0 \cdot \left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2}{1 + \tau p} \right)$$

$$\frac{\tau^2}{1 + \tau p} = \frac{\tau}{\frac{1}{\tau} + p} = \tau \cdot L(e^{-t/\tau}) \quad \text{D'où} \quad \boxed{s(t) = KE_0(t - \tau + \tau e^{-t/\tau})}$$

Tracé de la réponse :

- Tangente à l'origine :

$$\frac{d(s(t))}{dt} = KE_0(1 - e^{-t/\tau}) \text{ pour } t=0, s'(0) = 0$$

La tangente à l'origine est horizontale.

- Asymptote pour $t \rightarrow \infty$:

$$\text{Pour } t \rightarrow \infty, s(t) = KE_0(t - \tau)$$

- o L'asymptote coupe l'axe des abscisses pour $t = \tau$
- o Si $K \neq 1$, la sortie du système s'écarte indéfiniment de l'entrée.
- o Si $K = 1$, la sortie du système suit l'entrée avec un retard τ

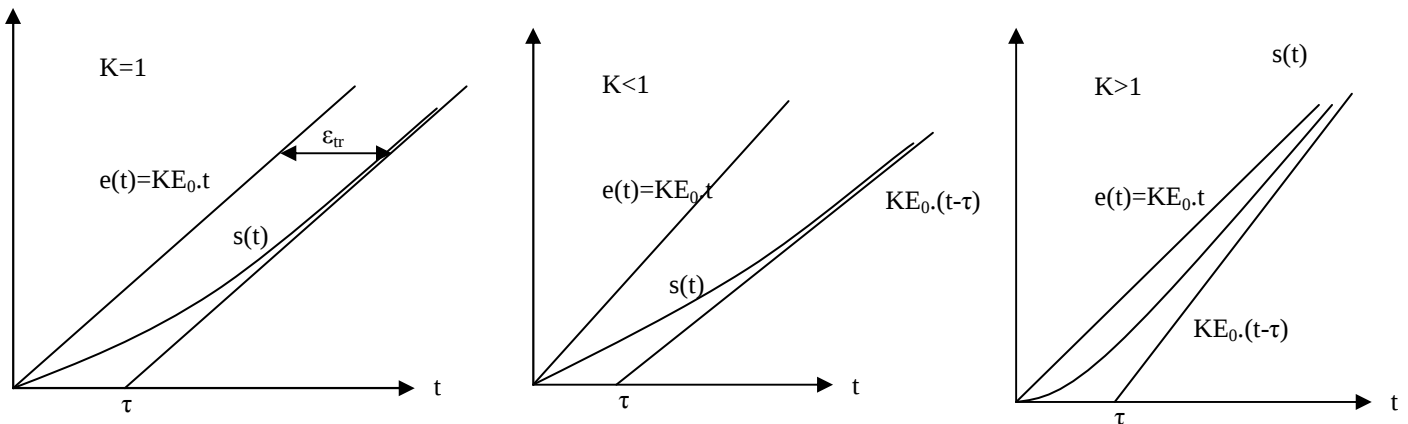
- Erreur de traînage :
L'erreur de traînage ε_{tr} est la différence $e(t) - s(t)$ quant $e(t)$ est une rampe.

$$\mathcal{E}_{tr} = (e(t) - s(t))$$

$$\text{Si } K=1, \quad \mathcal{E}_{tr} = E_0 \cdot t - E_0(t - \tau + e^{-t/\tau})$$

$$\mathcal{E}_{tr} = E_0 \cdot \tau(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{tr} = E_0 \cdot \tau$$



3. Réponse fréquentielle d'un système du 1^{er} ordre.

Dans ce paragraphe, nous allons étudier la réponse d'un système du 1^{er} ordre à une sollicitation harmonique : $e(t) = E_0 \sin(\omega t)$.

Cet essai se fait à fréquence variable, et permet de mettre en évidence l'évolution des caractéristiques en fonction de la pulsation ω . Il est très fondamental dans l'étude des filtres et dans l'analyse de la stabilité.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \quad \text{et} \quad E(p) = E_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \cdot E_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{KE_0\omega}{\tau(\frac{1}{\tau} + p)(\omega^2 + p^2)}$$

$$S(p) = \frac{KE_0\omega}{\tau(\frac{1}{\tau} + p)(p - j\omega)(p + j\omega)} \quad \text{On pose } a = \frac{1}{\tau}$$

$$\text{d'où} \quad S(p) = \frac{KE_0\omega}{\tau(p+a)(p-j\omega)(p+j\omega)} = \frac{KE_0\omega}{\tau} \cdot \left[\frac{1}{(p+a)(p-j\omega)(p+j\omega)} \right]$$

Décomposition en éléments simples :

$$S(p) = \frac{KE_0\omega}{\tau} \cdot \left[\frac{A}{(p-j\omega)} + \frac{B}{(p+j\omega)} + \frac{C}{(p+a)} \right], \text{ on cherche donc A, B, C tels que :}$$

$$\left[\frac{1}{(p+a)(p-j\omega)(p+j\omega)} \right] = \left[\frac{A}{(p-j\omega)} + \frac{B}{(p+j\omega)} + \frac{C}{(p+a)} \right]$$

- Recherche de A : on multiplie les deux termes par $(p-j\omega)$

$$\frac{1}{(p+a)(p+j\omega)} = A + \frac{B(p-j\omega)}{(p+j\omega)} + \frac{C(p-j\omega)}{(p+a)}$$

$$A = \frac{1}{(p+a)(p+j\omega)} - \frac{B(p-j\omega)}{(p+j\omega)} - \frac{C(p-j\omega)}{(p+a)}$$

Si $p = j\omega$

$$A = \frac{1}{(j\omega + a)(j\omega + j\omega)} = \frac{1}{-2\omega^2 + 2aj\omega} = \frac{1}{2\omega(aj - \omega)}$$

$$A = \frac{1}{2j\omega(a + j\omega)}$$

- Recherche de B : on multiplie les deux termes par $(p + j\omega)$

$$B = \frac{1}{(p + a)(p - j\omega)} - \frac{A(p + j\omega)}{(p - j\omega)} - \frac{C(p + j\omega)}{(p + a)}$$

Si $p = -j\omega$

$$B = \frac{1}{(a - j\omega)(-2j\omega)} = \frac{1}{-2aj\omega - 2\omega^2}$$

$$B = \frac{-1}{2j\omega(a - j\omega)}$$

- Recherche de C : on multiplie les deux termes par $(p + a)$

$$C = \frac{1}{(p + j\omega)(p - j\omega)} - \frac{A(p + a)}{(p - j\omega)} - \frac{B(p + a)}{(p + j\omega)}$$

Si $p = -a$

$$C = \frac{1}{(a - j\omega)(a + j\omega)}$$

$$C = \frac{1}{a^2 + \omega^2}$$

On peut donc écrire :

$$S(p) = \frac{KE_0\omega}{\tau} \cdot \left[\frac{1}{2j\omega(a + j\omega)} + \frac{-1}{2j\omega(a - j\omega)} + \frac{1}{a^2 + \omega^2} \right]$$

Et on en tire $s(t)$:

$$s(t) = \frac{KE_0\omega}{\tau} \left[\frac{1}{2j\omega} \left(\frac{1}{a + j\omega} \cdot e^{j\omega t} - \frac{1}{a - j\omega} \cdot e^{-j\omega t} \right) + \frac{1}{a^2 + \omega^2} \cdot e^{-at} \right]$$

Or, $a + j\omega = \sqrt{a^2 + \omega^2} \cdot e^{-j\varphi}$ avec $\varphi = -\arctg \frac{\omega}{a}$

et, $a - j\omega = \sqrt{a^2 + \omega^2} \cdot e^{+j\varphi}$ avec $\varphi = -\arctg \frac{\omega}{a}$

$$s(t) = \frac{KE_0\omega}{\tau} \left[\frac{1}{2j\omega} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} (e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} - e^{-j\varphi} \cdot e^{-j\omega t}) \right) + \frac{1}{a^2 + \omega^2} \cdot e^{-at} \right]$$

$$s(t) = \frac{KE_0\omega}{\tau} \left[\frac{1}{2j\omega} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} (e^{j(\omega t + \varphi)} - e^{-j(\omega t + \varphi)}) \right) + \frac{1}{a^2 + \omega^2} \cdot e^{-at} \right]$$

$$e^{j(\omega t + \varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi) \text{ et } e^{-j(\omega t + \varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) - j \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$s(t) = \frac{KE_0\omega}{\tau} \left[\frac{1}{2j\omega} \left(\frac{\cos(\omega t + \varphi) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi) - (\cos(\omega t + \varphi) - j \cdot \sin(\omega t + \varphi))}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \right) + \frac{1}{a^2 + \omega^2} \cdot e^{-at} \right]$$

$$s(t) = \frac{KE_0\omega}{\tau} \left[\frac{1}{2j\omega} \left(\frac{2j \cdot \sin(\omega t + \varphi)}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \right) + \frac{1}{a^2 + \omega^2} \cdot e^{-at} \right] = \frac{KE_0\omega}{\tau} \left[\frac{\sin(\omega t + \varphi)}{\omega\sqrt{a^2 + \omega^2}} + \frac{1}{a^2 + \omega^2} \cdot e^{-at} \right]$$

$$\text{Or, } a = \frac{1}{\tau}, \text{ d'où } s(t) = \frac{KE_0}{\tau} \frac{\sin(\omega t + \varphi)}{\sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2}} + \frac{KE_0\omega}{\tau} \frac{1}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \cdot e^{-t/\tau}$$

donc :

$$s(t) = \frac{KE_0}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi) + \frac{KE_0\omega\tau}{1 + \tau^2 \omega^2} \cdot e^{-t/\tau}$$

Avec :

- Régime forcé ou permanent ou établi : $\frac{KE_0}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi)$
- Régime transitoire : $\frac{KE_0\omega\tau}{1 + \tau^2 \omega^2} \cdot e^{-t/\tau}$

Seul le régime forcé sera étudié en CPGE.

$$\text{Il peut se mettre sous la forme : } s(t) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} E_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) = S_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Avec :

- $\frac{S_0}{E_0} = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$: rapport d'amplification,
- $\varphi = -\arctg(\tau\omega)$: déphasage ou retard.

Remarque :

$$\text{Calculons } H(j\omega) \quad H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau}$$

$$\|H(j\omega)\| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \text{ et } \text{Arg}[H(j\omega)] = -\arctg(\omega\tau)$$

On remarque que $H(j\omega)$ à même phase et même module que le régime forcé de la réponse fréquentielle.

4. Représentation de la réponse fréquentielle.

Les diagrammes représentatifs de la réponse fréquentielle sont basés sur la qualité du module et de l'argument de $H(j\omega)$ qui correspondent à ceux de la réponse en fréquence.

Il existe trois diagrammes :

- Diagramme de Bode :
 - o Un tracé de $\|H(j\omega)\| = f(\omega)$
 - o Un tracé de $\text{Arg}(H(j\omega)) = g(\omega)$
- Diagramme de Nyquist :
 - o On écrit $H(j\omega) = \Re(H(j\omega)) + \Im(H(j\omega))$
 - o On trace $\Im(H(j\omega)) = f(\Re(H(j\omega)))$
- Diagramme de Black :
 - o On trace : $\|H(j\omega)\| = f(\arg(H(j\omega)))$

a. Diagramme de Bode.

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau}$$

i. Diagramme du module :

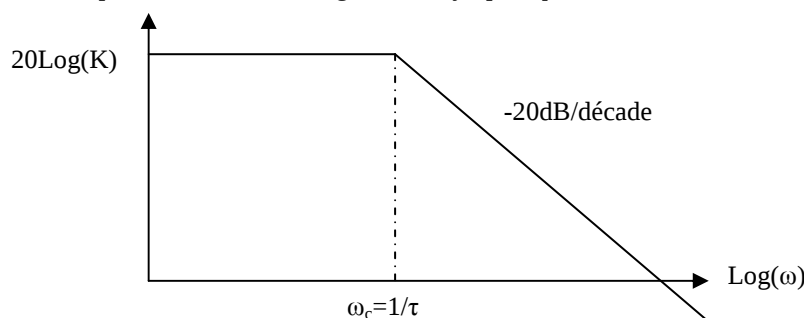
Le module de $H(j\omega)$ est calculé en dB :

$$\|H(j\omega)\| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} = \frac{S_0}{E_0} : \text{rapport d'amplification}$$

$$\|H(j\omega)\|_{dB} = 20 \log K - 20 \log(\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2})$$

- Si $\omega \rightarrow 0$:
 $\tau^2 \omega^2 \ll 1 \Rightarrow \|H(j\omega)\|_{dB} = 20 \log K$ Asymptote horizontale pour les basses fréquences.
- Si $\omega \rightarrow \infty$
 $\tau^2 \omega^2 \gg 1 \Rightarrow \|H(j\omega)\|_{dB} = 20 \log K - 20 \log(\omega \cdot \tau) = 20 \log K - 20 \log(\omega) - 20 \log(\tau)$
 $\|H(j\omega)\|_{dB} = 20 \log \frac{K}{\tau} - 20 \log(\omega)$
 - o $20 \log \frac{K}{\tau}$ est une constante
 - o $-20 \log(\omega)$ signifie que si ω est multipliée par 10 (une décade), $s(t)$ est atténuée de 20dB. En coordonnées semi-logarithmiques, ce phénomène se traduit par une asymptote de pente -20dB/décade.
- Intersection des asymptotes :
 Les deux asymptotes se croisent pour une pulsation ω_c telle que :
 $20 \log K = 20 \log K - 20 \log(\omega_c) - 20 \log(\tau)$
 $\log(\omega_c) = -\log(\tau) \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{\tau}$: Pulsation de coupure

On peut donc tracer le diagramme asymptotique du module :



- Quelques points de la courbe :

- o Pour $\omega = \omega_c$

$$\|H(j\omega)\|_{dB} = 20 \log K - 20 \log(\sqrt{1+1}) = 20 \log K - 3dB$$

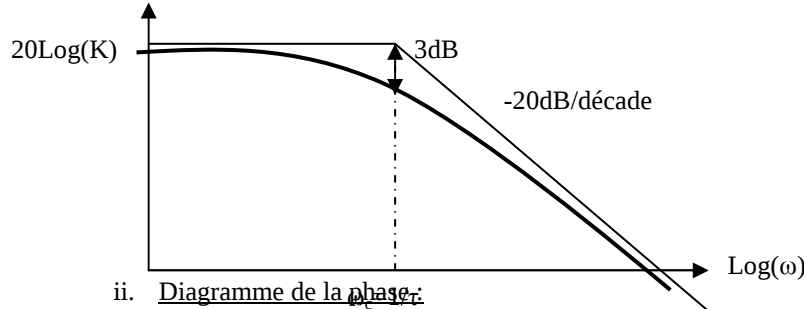
- o Pour $\omega = 0,1 \cdot \omega_c$

$$\|H(j\omega)\|_{dB} = 20 \log K - 20 \log(\sqrt{1+0,01}) = 20 \log K - 0,04dB$$

- o Pour $\omega = 10 \cdot \omega_c$

$$\|H(j\omega)\|_{dB} = 20 \log K - 20 \log(\sqrt{1+100}) = 20 \log K - 20,04dB$$

On peut tracer la courbe de module approchée :



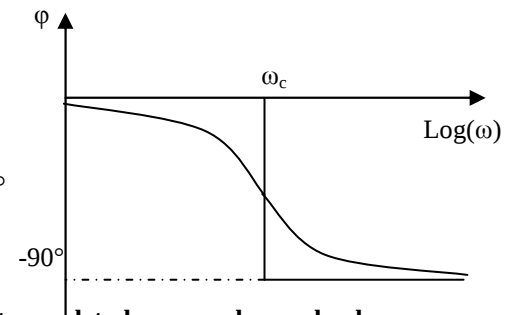
ii. Diagramme de la phase:

La phase, ou argument de $H(j\omega)$ est l'angle $\varphi = -\text{Arctg}(\omega\tau)$.

La phase est indépendante du gain statique K .

- Si $\omega \rightarrow 0$: $\varphi \rightarrow 0$
- Si $\omega \rightarrow \infty$: $\varphi \rightarrow -90^\circ$
- Si $\omega = \omega_c$: $\varphi = -\text{Arctg}(1) = -45^\circ$
- Si $\omega = 0,1 \cdot \omega_c$: $\varphi = -\text{Arctg}(0,1) = -5,7^\circ$
- Si $\omega = 10 \cdot \omega_c$: $\varphi = -\text{Arctg}(10) = -84,3^\circ$

On peut tracer la courbe de phase approchée :



Attention : **le diagramme de Bode n'a de sens que s'il est complet, donc avec la courbe de module et la courbe de phase..**

b. Diagramme de Nyquist.

Le diagramme de Nyquist est la représentation de $H(j\omega)$ dans le plan complexe. Il est donc nécessaire de calculer $\text{Im}(H(j\omega))$ et $\text{Re}(H(j\omega))$

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau} = \frac{K(1 - j\omega\tau)}{1 + \omega^2 \cdot \tau^2} = \frac{K}{1 + \omega^2 \cdot \tau^2} - j \cdot \frac{K\omega\tau}{1 + \omega^2 \cdot \tau^2}$$

La courbe représentative du système dans le plan complexe, appelé lieu de Nyquist est l'ensemble des points de coordonnées x, y tels que :

$$x = \frac{K}{1 + \omega^2 \cdot \tau^2} \text{ et } y = \frac{-K\omega\tau}{1 + \omega^2 \cdot \tau^2}$$

- Quelques points de la courbe :

- o Pour $\omega = \omega_c$

$$x = \frac{K}{2} \text{ et } y = \frac{-K}{2}$$

- o Pour $\omega = 0$

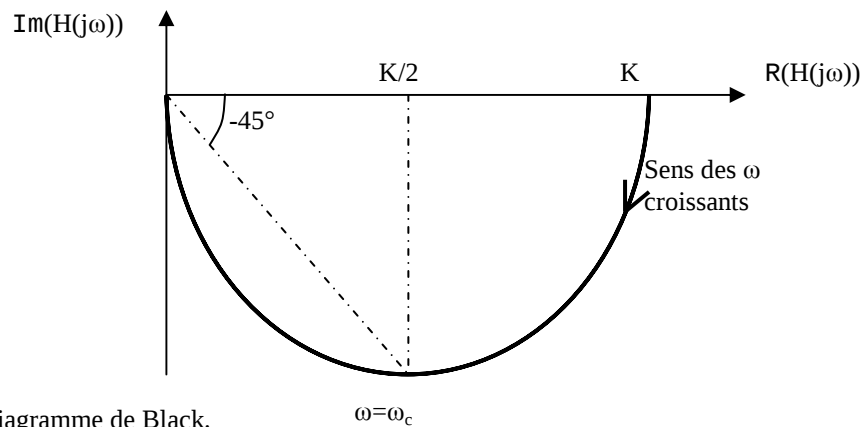
$$x = K \text{ et } y = 0$$

- o Pour $\omega \rightarrow \infty$
 $x = 0$ et $y = 0$

- Allure de la courbe :

On montre que le lieu de Nyquist d'un système du 1^{er} ordre est un demi-cercle de centre $(0, K/2)$ et de rayon $K/2$.

Pour cela on montre que : $(\Re e - \frac{K}{2})^2 + (\Im m)^2 = (\frac{K}{2})^2$



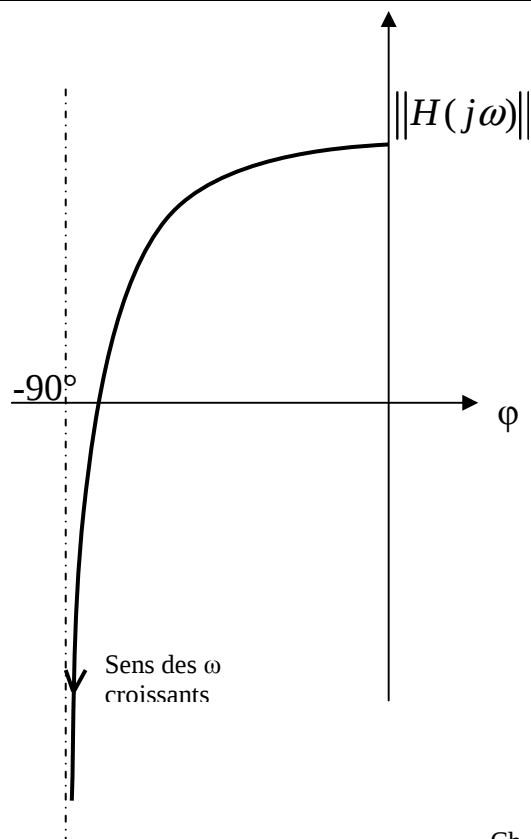
c. Diagramme de Black.

Le diagramme de Black est proche du diagramme de Bode, mais il n'est représenté que par une courbe, ce qui en fait un outil de synthèse très utilisé.

Il est donné par la courbe $\|H(j\omega)\| = f(\arg(H(j\omega)))$

- Construction de la courbe :
 Elle se fait point par point à partir du diagramme de Bode, ou par calcul de quelques points.
- Quelques points de la courbe :

ω	$\ H(j\omega)\ $	$\arg(H(j\omega))$
0	$20 \cdot \log(K)$	0
$\omega = 0,1 \cdot \omega_c$	$20 \cdot \log(K)$	-5,7
$\omega = \omega_c$	$20 \cdot \log(K) - 3\text{dB}$	-45
$\omega = 10 \cdot \omega_c$	$20 \cdot \log(K) - 20\text{dB}$	-84,3
$\omega \rightarrow \infty$	$-\infty$	-90



Chapitre 5 : Système du 2nd ordre.

1. Définition, équations du système.

Un système du 2nd ordre est un système dont l'équation caractéristique est de la forme :

$$S_0 \cdot s(t) + S_1 \cdot \frac{d(s(t))}{dt} + S_2 \cdot \frac{d(s(t))^2}{dt^2} = E_0 \cdot e(t) \text{ ou bien,}$$

$$S_0 \cdot s(t) + S_1 \cdot \frac{d(s(t))}{dt} + S_2 \cdot \frac{d(s(t))^2}{dt^2} = E_0 \cdot e(t) + E_1 \cdot \frac{d(e(t))}{dt} + E_2 \cdot \frac{d(e(t))^2}{dt^2} \text{ dans le cas}$$

d'un système du 2nd ordre généralisé.

Dans cette étude théorique, nous ne traiterons que les systèmes de la première forme.

a. Transmittance en p.

La transformée de Laplace de l'équation caractéristique permet d'écrire :

$$S_0 \cdot S(p) + S_1 \cdot p \cdot S(p) + S_2 \cdot p^2 \cdot S(p) = E_0 \cdot E(p) \Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{E_0}{S_0 + S_1 \cdot p + S_2 \cdot p^2} = \frac{\frac{E_0}{S_0}}{1 + p \cdot \frac{S_1}{S_0} + p^2 \cdot \frac{S_2}{S_0}}$$

b. Forme canonique :

Il existe 2 formes canoniques pour les systèmes du 2nd ordre :

- 1^{ère} forme (la plus courante) :

$$\text{On écrit : } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2}$$

- 2^{ème} forme :

$$\text{On écrit : } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\omega_n^2 \cdot K}{\omega_n^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot p + p^2}$$

$$\text{o } K = \frac{E_0}{S_0} :$$

Gain statique du système

$$\text{o } \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{S_2}{S_0} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{S_0}{S_2}} :$$

pulsation naturelle du système

$$\text{o } \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = \frac{S_1}{S_0} \Rightarrow \xi = \frac{\omega_n \cdot S_1}{2 \cdot S_0} = \frac{S_1}{2 \cdot \sqrt{S_0 S_2}} :$$

coefficient d'amortissement réduit du système.

2. Réponses indicielles d'un système du 2nd ordre.

La seule réponse temporelle étudiée sera la réponse d'un système du 2nd ordre à un échelon d'Heaviside.

$$e(t) = \gamma(t) \Rightarrow E(p) = \Gamma(p) = \frac{1}{p}$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2} \Rightarrow S(p) = E(p) \cdot H(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2}$$

- Etude du régime établi.

$$s(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} (p(S(p))) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(p \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2} \right) = 0$$

$$s(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} (p(S(p))) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2} \right) = K$$

- Pente à l'origine.

$$\frac{d(s(0))}{dt} = \lim_{p \rightarrow \infty} p(p(S(p)) - s(0)) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \left(\left(p \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2} \right) - 0 \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} \right) = 0$$

La tangente à l'origine est horizontale, ce qui diffère des systèmes du 1^{er} ordre.

- Etude du régime transitoire.

$$S(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2} = \frac{1}{p} \cdot \frac{\omega_n^2 \cdot K}{\omega_n^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot p + p^2}$$

Pour étudier le régime transitoire, il faut replacer S(p) dans le domaine temporel. Pour ce faire, il est nécessaire de faire une décomposition de S(p) en éléments simples.

Cette décomposition est faisable si le dénominateur est un produit. Il faut donc factoriser le dénominateur grâce à la recherche des pôles de S(p).

Nota : on appelle pôles les termes qui annulent le dénominateur.

- o Calcul des pôles.

$$1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2 = 0 \Leftrightarrow \omega_n^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot p + p^2 = 0$$

$$\Delta' = (\omega_n \cdot \xi)^2 - \omega_n^2 = \omega_n^2 (\xi^2 - 1)$$

- o 1^{er} cas $\xi > 1 \Rightarrow \Delta' > 0$

L'équation des pôles à deux racines réelles positives :

$$P_1 = -\xi \omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$P_2 = -\xi \omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

On pose $\tau_1 = \frac{-1}{P_1}$ et $\tau_2 = \frac{-1}{P_2}$, en remarquant que, malgré leurs écritures, τ_1 et τ_2 sont des réels, non des constantes de temps.

S(p) devient :

$$S(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K \cdot \omega_n^2}{(p - P_1) \cdot (p - P_2)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{K \cdot \omega_n^2}{\left(p + \frac{1}{\tau_1}\right) \cdot \left(p + \frac{1}{\tau_2}\right)}$$

$$S(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K \cdot \omega_n^2}{\left(\frac{1 + \tau_1 p}{\tau_1}\right) \cdot \left(\frac{1 + \tau_2 p}{\tau_2}\right)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{K \cdot \omega_n^2}{(1 + \tau_1 p) \cdot (1 + \tau_2 p) \cdot \frac{1}{\tau_1 \cdot \tau_2}}$$

$$\text{Remarque : } \tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{-1}{P_1} \cdot \frac{-1}{P_2} = \frac{1}{-\xi \omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \frac{1}{-\xi \omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}$$

$$\tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{1}{\xi^2 \omega_n^2 - \omega_n^2 (\sqrt{\xi^2 - 1})^2} = \frac{1}{\xi^2 \omega_n^2 - \omega_n^2 \xi^2 + \omega_n^2}$$

$$\tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{1}{\omega_h^2}$$

D'où :

$$S(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K \cdot \omega_h^2}{(1 + \tau_1 p) \cdot (1 + \tau_2 p) \cdot \omega_h^2} = \frac{1}{p} \cdot \frac{K}{(1 + \tau_1 p) \cdot (1 + \tau_2 p)}$$

La décomposition en éléments simples est de la forme :

$$S(p) = K \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{(1 + \tau_1 p)} + \frac{C}{(1 + \tau_2 p)} \right)$$

- Calcul de A : On multiplie les deux termes par p

$$\frac{1}{(1 + \tau_1 p) \cdot (1 + \tau_2 p)} = A + \frac{Bp}{(1 + \tau_1 p)} + \frac{Cp}{(1 + \tau_2 p)}$$

Si $p=0$,

$$A = 1$$

- Calcul de B : On multiplie les deux termes par $(1 + \tau_1 p)$

$$\frac{1}{p \cdot (1 + \tau_2 p)} = \frac{(1 + \tau_1 p)}{p} + B + \frac{C(1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)}$$

$$\text{Si } p = \frac{-1}{\tau_1}$$

$$B = \frac{\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1}$$

- Calcul de C : On multiplie les deux termes par $(1 + \tau_2 p)$

$$\frac{1}{p \cdot (1 + \tau_1 p)} = \frac{(1 + \tau_2 p)}{p} + \frac{B(1 + \tau_2 p)}{(1 + \tau_1 p)} + C$$

$$\text{Si } p = \frac{-1}{\tau_2}$$

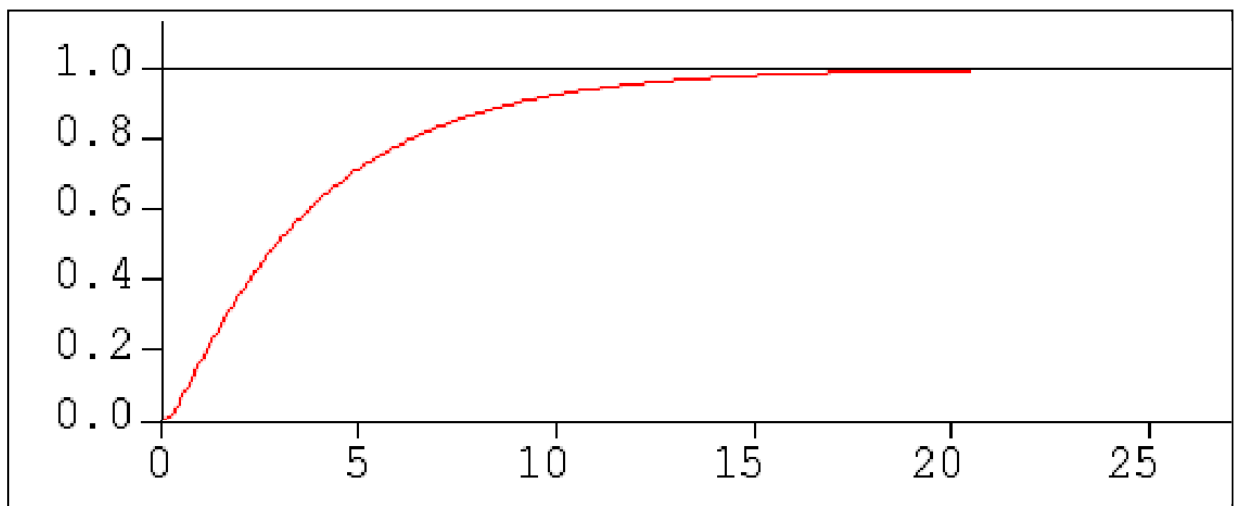
$$C = \frac{\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2}$$

Donc, :

$$S(p) = K \left(\frac{1}{p} + \frac{\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1} \cdot \frac{1}{(1 + \tau_1 p)} + \frac{\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \frac{C}{(1 + \tau_2 p)} \right)$$

D'où

$$s(t) = K + \frac{K}{\tau_2 - \tau_1} \cdot (\tau_1 \cdot e^{-t/\tau_1} - \tau_2 \cdot e^{-t/\tau_2})$$



o 2^{ème} cas $\xi = 1 \Rightarrow \Delta' = 0$

L'équation des pôles à une racine réelle double $P_1 = -\omega_n$

$$S(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K \cdot \omega_n^2}{(p - P_1)^2} = \frac{K \cdot \omega_n^2}{p} \cdot \frac{\frac{-1}{P_1^2}}{\frac{(p - P_1)^2}{-P_1^2}} = \frac{K \cdot \omega_n^2}{p} \cdot \frac{\frac{-1}{P_1^2}}{\left(\frac{p}{-P_1} + 1\right)^2}$$

On pose $\tau = \frac{-1}{P_1} = \frac{1}{\omega_n}$:

$$S(p) \text{ devient : } S(p) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{p} \cdot \frac{\frac{1}{\omega_n^2}}{(\tau p + 1)^2} = K \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(1 + \tau p)^2} \right)$$

Décomposition en éléments simples :

$$S(p) = K \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(1 + \tau p)^2} \right) = K \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{(1 + \tau p)} + \frac{C}{(1 + \tau p)^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow A(1 + 2\tau p + \tau^2 p^2) + B(p + \tau p^2) + Cp = 1$$

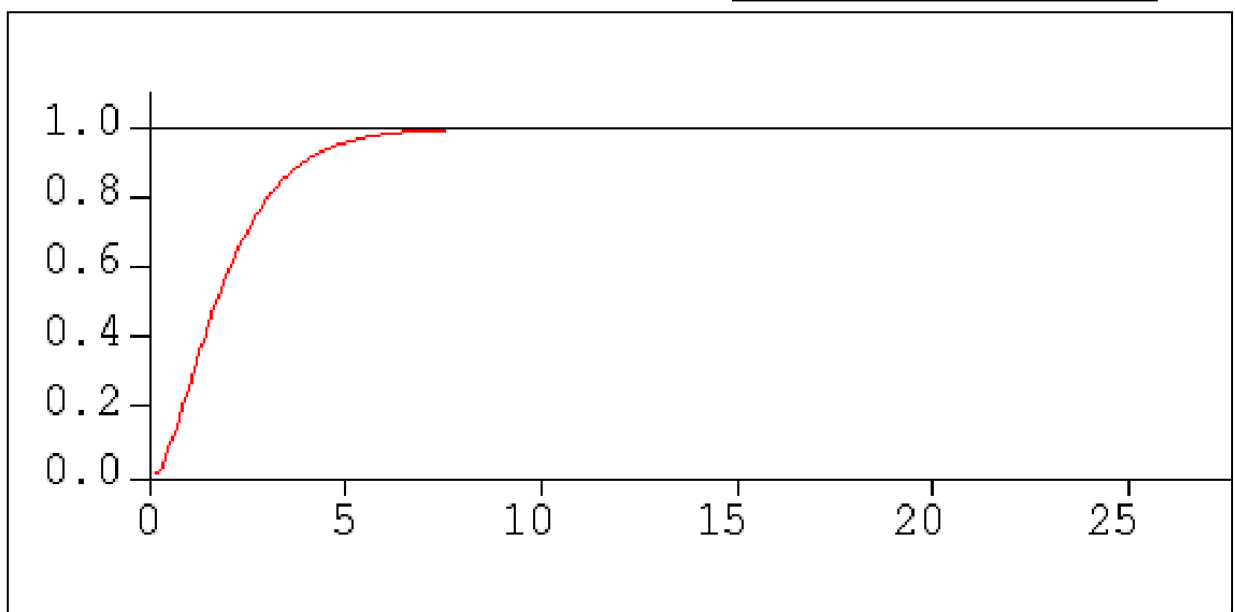
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ 2\tau + B + C = 0 \\ \tau^2 + B\tau = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -\tau \\ C = -\tau \end{cases}$$

$$\text{D'où } S(p) = K \left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{(1 + \tau p)} - \frac{\tau}{(1 + \tau p)^2} \right)$$

$$\text{On donne } \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(1 + \tau p)^2} \right) = \frac{t}{\tau^2} \cdot e^{-t/\tau}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$s(t) = K(1 - e^{-t/\tau} - \frac{t}{\tau} \cdot e^{-t/\tau})$$



o 3^{ème} cas $\xi < 1 \Rightarrow \Delta' < 0$

L'équation des pôles à deux racines complexes conjuguées.

$$P_1 = -\xi \omega_n + j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = -\omega_n (\xi - j \sqrt{1 - \xi^2})$$

$$P_2 = -\xi \omega_n - j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = -\omega_n (\xi + j \sqrt{1 - \xi^2})$$

Si on pose $\xi = \cos(\theta)$ alors, $\sqrt{1 - \xi^2} = \sin(\theta)$ donc,

$$P_1 = -\omega_n \cdot e^{-j\theta} \text{ et } P_2 = -\omega_n \cdot e^{+j\theta} \text{ avec } \theta = \arctg\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right)$$

$$S(p) = K \cdot \omega_n^2 \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(p - P_1) \cdot (p - P_2)} \right) = K \cdot \omega_n^2 \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{(p - P_1)} + \frac{C}{(p - P_2)} \right)$$

▪ Calcul de A : On multiplie les deux termes par p

$$\frac{1}{(p - P_1) \cdot (p - P_2)} = A + \frac{Bp}{(p - P_1)} + \frac{Cp}{(p - P_2)}$$

$$\text{Si } p=0, \quad A = \frac{1}{P_1 P_2}$$

$$P_1 P_2 = (-\omega_n \cdot (\xi - j \sqrt{1 - \xi^2})) \cdot (-\omega_n \cdot (\xi + j \sqrt{1 - \xi^2})) = \omega_n^2 \xi^2 + \omega_n^2 \cdot (\sqrt{1 - \xi^2})^2$$

$$P_1 P_2 = \omega_n^2 (\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2) = \omega_n^2$$

D'où

$$A = \frac{1}{\omega_n^2}$$

▪ Calcul de B : On multiplie les deux termes par (p-P₁)

$$\frac{1}{p \cdot (p - P_2)} = \frac{A(p - P_1)}{p} + B + \frac{C(p - P_1)}{(p - P_2)}$$

$$\text{Si } p = P_1 \quad \frac{1}{P_1 \cdot (P_1 - P_2)} = B = \frac{P_2}{\omega_n^2 \cdot (P_1 - P_2)}$$

D'où

$$B = \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{P_2}{(P_1 - P_2)}$$

▪ Calcul de C : On multiplie les deux termes par (p-P₂)

$$\frac{1}{p \cdot (p - P_1)} = \frac{A(p - P_2)}{p} + \frac{B(p - P_2)}{(p - P_1)} + C$$

$$\text{Si } p = P_2 \quad \frac{1}{P_2 \cdot (P_2 - P_1)} = C = \frac{P_1}{\omega_n^2 \cdot (P_2 - P_1)}$$

D'où

$$C = \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{P_1}{(P_2 - P_1)}$$

On peut donc écrire :

$$S(p) = K \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{P_2}{(P_1 - P_2)} \cdot \frac{1}{(p - P_1)} + \frac{P_1}{(P_2 - P_1)} \cdot \frac{1}{(p - P_2)} \right)$$

On en tire :

$$s(t) = K \cdot \left(1 + \frac{P_2}{(P_1 - P_2)} \cdot e^{P_1 t} + \frac{P_1}{(P_2 - P_1)} \cdot e^{P_2 t} \right)$$

On connaît :

$$\begin{cases} P_1 = -\omega_h \cdot e^{j\theta} \\ P_2 = -\omega_h \cdot e^{-j\theta} \\ P_1 - P_2 = 2 \cdot j \cdot \omega_h \cdot \sqrt{1-\xi^2} \\ P_2 - P_1 = -2 \cdot j \cdot \omega_h \cdot \sqrt{1-\xi^2} \end{cases}$$

$$s(t) = K \cdot \left(1 + \frac{-\omega_h \cdot e^{j\theta}}{2 \cdot j \cdot \omega_h \cdot \sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{P_1 t} + \frac{-\omega_h \cdot e^{-j\theta}}{-2 \cdot j \cdot \omega_h \cdot \sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{P_2 t} \right)$$

$$s(t) = K \cdot \left(1 - \frac{e^{j\theta}}{2 \cdot j \cdot \sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\omega_n t (\xi - j \sqrt{1-\xi^2})} + \frac{e^{-j\theta}}{2 \cdot j \cdot \sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\omega_n t (\xi + j \sqrt{1-\xi^2})} \right)$$

$$s(t) = K \cdot \left(1 - \frac{e^{-\omega_n \xi \cdot t}}{2 \cdot j \cdot \sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{j \cdot (\omega_n t \sqrt{1-\xi^2} + \theta)} + \frac{e^{-\omega_n \xi \cdot t}}{2 \cdot j \cdot \sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-j \cdot (\omega_n t \sqrt{1-\xi^2} + \theta)} \right)$$

$$s(t) = K \cdot \left(1 - \frac{e^{-\omega_n \xi \cdot t}}{2 \cdot j \cdot \sqrt{1-\xi^2}} \cdot \left[e^{j \cdot (\omega_n t \sqrt{1-\xi^2} + \theta)} - e^{-j \cdot (\omega_n t \sqrt{1-\xi^2} + \theta)} \right] \right)$$

$$s(t) = K \cdot \left(1 - \frac{e^{-\omega_n \xi \cdot t}}{2 \cdot j \cdot \sqrt{1-\xi^2}} \cdot \left[2j \cdot \sin(\omega_n \cdot t \cdot \sqrt{1-\xi^2} + \theta) \right] \right)$$

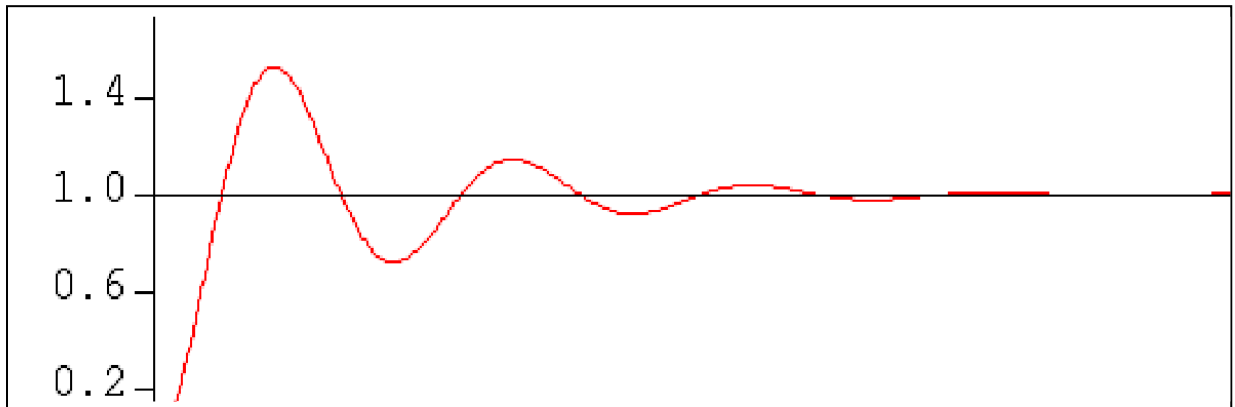
$$s(t) = K \cdot \left(1 - \frac{e^{-\omega_n \xi \cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \left[\sin(\omega_n \cdot t \cdot \sqrt{1-\xi^2} + \theta) \right] \right)$$

La réponse temporelle comprend un terme en $\sin(\omega_n \cdot t \cdot \sqrt{1-\xi^2})$ si $\xi < 1$.

Dans ce cas, on parle de pseudo période, car le signal d'entrée n'est pas périodique.

La pulsation de pseudo période est

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$



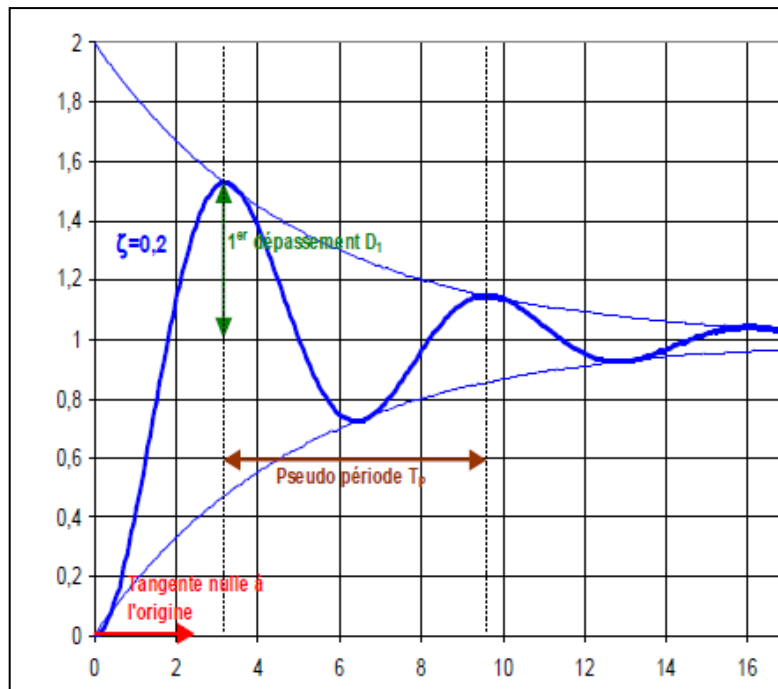
- Dépassement.

Si $\xi > 1$, il y a pseudo pulsation, et la valeur finale est dépassée au cours de l'établissement du régime permanent.

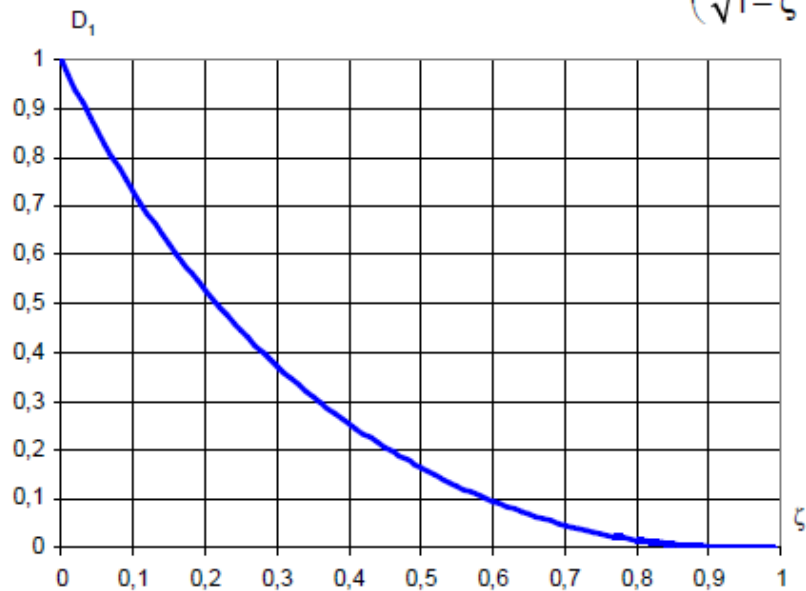
On peut montrer (recherche des valeurs annulant la dérivée de $s(t)$), que D_1 , premier dépassement :

o à lieu pour $t = t_1 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$,

o et sa valeur est $D_1 = e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$



$$D_1 = K \cdot \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$



Abaque donnant la valeur du premier dépassement D_1 en fonction de ζ pour $K=1$

Remarque :

On exprime souvent le dépassement en pourcentage de la valeur

finale : $D_1 = \frac{\text{Valeurmaxi} - \text{Valeurfinale}}{\text{Valeurfinale}}$

